ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Sull'efflusso di un liquido pesante da un orificio circolare*. Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. Si consideri un liquido non viscoso, dotato di moto permanente, simmetrico rispetto ad un asse Oz.

Sieno: r, θ, z le coordinate semipolari di un punto generico; $u(r, z)$ e $v(r, z)$ le componenti, radiale ed assiale, della velocità, giacente per ipotesi in piano meridiano. Le linee di corrente — situate esse pure nei piani meridiani — sono definite dall'equazione

$$d\psi = r(v\,dr - u\,dz) = 0\,, \tag{1}$$

$\psi(r, z)$ essendo la *funzione di Stokes*. Ciò è ben noto.

Se esiste un potenziale di velocità $\varphi(r, z)$, si deve avere, inoltre,

$$d\varphi = u\,dr + v\,dz\,. \tag{2}$$

Dalle equazioni (1) e (2) scendono ovviamente le relazioni:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,,\\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si ponga ora

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= a_0 + \sum_1^\infty{}_n\, a_n r^n\,,\\ \psi &= \sum_1^\infty{}_n\, b_n r^n\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

essendo le a e le b funzioni di z tali da assicurare la convergenza uniforme delle serie indicate, per tutti i valori finiti di r e di z che si avrà bisogno di considerare.

Tenendo conto che le funzioni φ e ψ debbono soddisfare alle relazioni differenziali (3), un calcolo assai facile mostra che le funzioni a_n e b_n con n dispari devono essere nulle, mentre le altre si possono esprimere mediante la sola a_0 e sue derivate. Si ottiene, così,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= a_0 + \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n r^{2n}}{[2\,.\,4\,.\,...\,(2n)]^2}\,\frac{d^{2n}a_0}{dz^{2n}}\ ^{(2)}\,,\\ \psi &= \frac{1}{2}r^2\frac{da_0}{dz} + \sum_2^\infty{}_n \frac{(-1)^{n-1} r^{2n}}{[2\,.\,4\,.\,...\,(2n)]^2\,2n}\,\frac{d^{2n-1}a_0}{dz^{2n-1}}\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1914.

[2] Cfr. Résal, *Traité de mécanique générale* (Paris, Gauthier-Villars, 1874), tomo II, pag. 206.

L'asse di simmetria ($r=0$) è la linea di corrente $\psi=0$. Sopra quest'asse si ha pure

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0\quad,\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{da_0}{dz}\,;$$

cioè $\frac{da_0}{dz}$ definisce la legge di variazione delle velocità sull'asse di simmetria Oz. Una volta assegnata questa legge, il movimento è completamente determinato.

Ciò premesso, veniamo a ciò che forma argomento della presente Nota, cioè al problema dell'efflusso di un liquido pesante da un orificio circolare.

2. Sia R il raggio dell'orificio, il cui centro prendiamo per origine delle coordinate. Converrà assumere Oz verticale discendente.

Sieno: g il valore assoluto dell'accelerazione di gravità; c la velocità media all'orificio ($z=0$); c_1 la velocità media ed r_1 il raggio in una sezione $z=l>0$. Prendendo la densità del liquido $=1$, la portata (all'orificio e, per conseguenza, in ogni sezione $z=$ costante) è manifestamente $\pi c\mathrm{R}^2$.

La forma del getto liquido dipende da quella del profilo libero (sezione della superficie tubolare della vena con un piano meridiano), la cui equazione è

$$\psi=\frac{1}{2}c\mathrm{R}^2\,. \tag{6}$$

Infatti, com'è noto, la differenza dei valori che la funzione di corrente ψ assume sul profilo e sull'asse Oz, definisce la portata nel piano meridiano Orz. Ora, tale portata, all'orificio è

$$\frac{1}{2}\frac{c\mathrm{R}^2\,d\theta}{d\theta}=\frac{1}{2}c\mathrm{R}^2\,,$$

e d'altra parte, come si è visto, è $\psi=0$ sopra Oz; dunque, sul profilo della vena, ψ deve avere il valore (6), c. d. d.

Sul profilo stesso la pressione dev'essere costante; si è perciò condotti alla seguente condizione:

$$u^2+v^2=\frac{1}{r^2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\}=2gz+\text{costante}\,, \tag{7}$$

che deve essere soddisfatta in tutti i punti del profilo libero.

Poichè i primi membri della (6) e della (7) possono esprimersi, mediante le (5), in funzione di a_0 e delle sue derivate, la eliminazione di a_0 tra la (6) e la (7) dà luogo all'equazione del profilo della vena [1].

[1] È questa, in sostanza, una estensione, ai moti di un liquido pesante simmetrici rispetto ad un asse, del criterio adoperato da lord Rayleigh nel problema piano dell'*onda*

3. Si può effettuare l'eliminazione in modo assai semplice, quando è lecito di trascurare negli sviluppi (5) i termini successivi al primo. Infatti, si ha allora

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi = a_0\,, \\ \psi = \dfrac{1}{2}\, r^2\, \dfrac{da_0}{dz}\,; \end{cases}$$

e la (6) e la (7) divengono, rispettivamente,

$$(9)\qquad \begin{cases} r^2\, \dfrac{da_0}{dz} = c\mathrm{R}^2\,, \\ \left(\dfrac{da_0}{dz}\right)^2 = 2gz + \text{costante}. \end{cases}$$

Eliminando, tra queste due relazioni, $\dfrac{da_0}{dz}$, e notando che per $r = \mathrm{R}$ dev'essere $z = 0$, si ricava per la costante il valore c^2, e per il profilo della vena l'equazione

$$(10)\qquad z = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{\mathrm{R}^4}{r^4} - 1\right), \qquad (r \leq \mathrm{R}).$$

Siccome, ponendo in (10) $z = l$, si deve avere

$$l = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{\mathrm{R}^4}{r_1^4} - 1\right),$$

e d'altra parte dev'essere

$$c_1 r_1^2 = c\mathrm{R}^2\,,$$

dalla precedente scende

$$(11)\qquad c_1^2 - c^2 = 2gl\,.$$

Dunque, *alle velocità medie, relative alle sezioni trasversali del getto liquido, si deve applicare la stessa legge che regola la caduta dei gravi* (*nel vuoto*).

Alla medesima conclusione io ero giunto studiando il problema laminare (cfr. loc. cit., *Sopra il regime* ecc.); giova però rilevare che, mentre *nel caso bidimensionale il profilo della lamina è una cubica, nel problema*

---

solitaria [Scientific papers, vol. I, pag. 256], e di cui ho già dato alcune applicazioni in altri problemi laminari [*Sopra il regime permanente in canali a rapido corso* (questi Rendiconti, vol. XX, 1911, pp. 633-637; oppure Zeitschrift für Mathematik und Physik, B. 61, 1912, pp. 76-84); e ancora, *Sopra l'efflusso a stramazzo* (questi Rend., vol. XXI, 1912, pp. 97-102)].

spaziale, che ci occupa, *la forma tubulare della vena* ha per sezione meridiana la curva (10), che *è una quintica.*

4. Vediamo ora quando è lecito di sfruttare l'approssimazione a cui ho fatto ricorso nel numero precedente.

Posto

$$(12) \qquad \psi^{\star} = \left(\frac{c^2}{2g\mathrm{R}}\right)^2 \sum_{2}^{\infty}{}_n (-1)^{n+1} \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (4n-7)}{2^{2n} [2 \,.\, 4 \ldots (2n)]^2 \, 2n} \times \\ \times \left(\frac{2gr}{c^2}\right)^{2n} \left(1 + \frac{2gz}{c^2}\right)^{-\frac{4n-5}{2}},$$

la seconda di (5) può scriversi, tenuto conto della seconda di (9), nella quale — per quanto si è visto — la costante è c^2,

$$\psi = \frac{1}{2} r^2 \frac{da_0}{dz} - 4c\mathrm{R}^2 \psi^{\star} .$$

Ciò posto, si noti: che, per $n \geq 2$,

$$\left(1 + \frac{2gz}{c^2}\right)^{-\frac{4n-5}{2}} < 1 ;$$

che per $r < \mathrm{R}$ e per $n \geq 2$

$$\left(\frac{2gr}{c^2}\right)^{2n} \leq \left(\frac{2g\mathrm{R}}{c^2}\right)^4$$

che

$$0 < \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (4n-7)}{2n [2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2n)]^2} < 1 \quad \text{per} \quad n \geq 2 ,$$

che

$$\sum_{2}^{\infty}{}_n \frac{1}{4^n} = \frac{1}{12} .$$

Allora dalla (12) scende, senz'altro,

$$|\psi^{\star}| < \frac{1}{12} \left(\frac{2g\mathrm{R}}{c^2}\right)^2 .$$

Dunque, *l'approssimazione a cui son ricorso nel numero precedente*, e che corrisponde a ritenere nullo $\psi^{\star}$, *può ritenersi valida* tutte le volte in cui il rapporto $\frac{2g\mathrm{R}}{c^2}$ è una quantità di primo ordine, cioè *quando la velocità media del getto all'orificio è abbastanza grande rispetto alla velocità di caduta libera di un grave (nel vuoto) da una altezza* R.

Osservazioni. — È ben manifesto che nei casi pratici queste conclusioni sono applicabili fino a che il moto della vena non divenga discontinuo.

Come scende facilmente dalla (10), se α è l'inclinazione sull'orizzonte del profilo della vena all'orificio, si deve avere

$$\operatorname{tg} \alpha = -4\left(\frac{c^2}{2gR}\right).$$

Dal punto di vista matematico si esige quindi che all'orificio, la sezione meridiana del recipiente abbia tale inclinazione.

Giova però rilevare *dal punto di vista fisico*, che questa condizione di continuità di direzione tra profilo rigido e pelo libero non sempre è verificata sperimentalmente. Dicono infatti gli idraulici (1) che se l'orificio è scolpito in parete sottile i filetti liquidi si presentano inclinati alla sezione di imbocco.

Può quindi ritenersi che la soluzione ora studiata sia anche atta a rappresentare, nei limiti accennati di approssimazione, l'efflusso da un foro circolare scolpito su parete sottile orizzontale.

Meccanica. — *Sulle equazioni fondamentali della dinamica dei sistemi continui*. Nota di G. D. Mattioli, presentata dal Socio T. Levi-Civita (2).

Nella presente Nota mi propongo di trasformare le equazioni fondamentali della dinamica dei mezzi continui, in modo da ricavare un sistema, di forma diversa ma sostanzialmente equivalente, che fa intervenire in modo esplicito l'energia e il suo flusso.

Una tale trasformazione è particolarmente indicata, come avrò prossimamente l'onore di comunicare all'Accademia, per collegare lo schema generale della dinamica classica colle moderne speculazioni suggerite dal principio di relatività.

1. Fissato un qualsiasi sistema continuo, rappresentino:

x, y, z le coordinate (cartesiane ortogonali) di un punto generico del sistema; t il tempo; $\mathbf{v}$ la velocità nel posto x, y, z, all'istante t; μ la densità della massa; $\mathbf{g}$ la quantità di moto per unità di volume; $\mathbf{F}$ la forza di massa unitaria applicata al punto x, y, z; Φ_x, Φ_y, Φ_z gli sforzi relativi ad elementi superficiali ordinatamente perpendicolari agli assi coordinati (velocità, quantità di moto ecc., intendendosi prese in senso vettoriale come è nella natura delle cose).

(1) Cfr. ad es. Masoni *Corso di idraulica teoretica e pratica* [Napoli, Pellerano, 1908, terza edizione, pag. 221].

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1914.