ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Come scende facilmente dalla (10), se α è l'inclinazione sull'orizzonte del profilo della vena all'orificio, si deve avere

$$\operatorname{tg}\alpha = -4\left(\frac{c^2}{2gR}\right).$$

Dal punto di vista matematico si esige quindi che all'orificio, la sezione meridiana del recipiente abbia tale inclinazione.

Giova però rilevare *dal punto di vista fisico*, che questa condizione di continuità di direzione tra profilo rigido e pelo libero non sempre è verificata sperimentalmente. Dicono infatti gli idraulici [1] che se l'orificio è scolpito in parete sottile i filetti liquidi si presentano inclinati alla sezione di imbocco.

Può quindi ritenersi che la soluzione ora studiata sia anche atta a rappresentare, nei limiti accennati di approssimazione, l'efflusso da un foro circolare scolpito su parete sottile orizzontale.

Meccanica. — *Sulle equazioni fondamentali della dinamica dei sistemi continui*. Nota di G. D. Mattioli, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

Nella presente Nota mi propongo di trasformare le equazioni fondamentali della dinamica dei mezzi continui, in modo da ricavare un sistema, di forma diversa ma sostanzialmente equivalente, che fa intervenire in modo esplicito l'energia e il suo flusso.

Una tale trasformazione è particolarmente indicata, come avrò prossimamente l'onore di comunicare all'Accademia, per collegare lo schema generale della dinamica classica colle moderne speculazioni suggerite dal principio di relatività.

1. Fissato un qualsiasi sistema continuo, rappresentino:

x, y, z le coordinate (cartesiane ortogonali) di un punto generico del sistema; t il tempo; $\mathbf{v}$ la velocità nel posto x, y, z, all'istante t; μ la densità della massa; $\mathbf{g}$ la quantità di moto per unità di volume; $\mathbf{F}$ la forza di massa unitaria applicata al punto x, y, z; Φ_x, Φ_y, Φ_z gli sforzi relativi ad elementi superficiali ordinatamente perpendicolari agli assi coordinati (velocità, quantità di moto ecc., intendendosi prese in senso vettoriale come è nella natura delle cose).

(1) Cfr. ad es. Masoni *Corso di idraulica teoretica e pratica* [Napoli, Pellerano, 1908, terza edizione, pag. 221].

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1914.

Si ha in primo luogo, per la definizione di quantità di moto,

$$(1_a) \qquad \mathbf{g} = \mu \mathbf{v}\,.$$

Le equazioni della dinamica classica dei sistemi continui, valide per qualsiasi tipo di mezzo, sono le seguenti:

$$(1_b) \qquad \mu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\Phi}_x - \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{\Phi}_y - \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\Phi}_z + \mathbf{F}\,,$$

$$(1_c) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \mu\mathbf{v} = 0:$$

delle quali, la prima è l'espressione del teorema della quantità di moto, la seconda è l'equazione di continuità. Il teorema dei momenti della quantità di moto si traduce notoriamente nelle relazioni di simmetria fra le componenti degli sforzi

$$\Phi_{zy} = \Phi_{yz} \quad , \quad \Phi_{xz} = \Phi_{zx} \quad , \quad \Phi_{yx} = \Phi_{xy}\,.$$

Atteso il parallelismo dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{g}$, queste relazioni possono essere scritte nella forma (equivalente, ma, per il nostro scopo, più opportuna come apparirà in seguito)

$$(1_d) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi_{zy} - \Phi_{yz} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{g})_x\,, \\ \Phi_{xz} - \Phi_{zx} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{g})_y\,, \\ \Phi_{yx} - \Phi_{xy} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{g})_z \end{array}\right.$$

2. Per la questione che ci interessa, è opportuno di trasformare le (1_b) e (1_c) nel modo seguente:

Si moltiplichi l'equazione di continuità per $\mathbf{v}$, e la si sommi alla (1_b): esplicitando la derivata totale $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ e raggruppando convenientemente i termini, si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu v_x \mathbf{v} + \boldsymbol{\Phi}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu v_y \mathbf{v} + \boldsymbol{\Phi}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu v_z \mathbf{v} + \boldsymbol{\Phi}_z) = \mathbf{F}\,,$$

la quale, badando alla definizione (1_a) della quantità di moto, posto

$$(2) \qquad \boldsymbol{\psi}_x = v_x \mathbf{g} + \boldsymbol{\Phi}_x \quad , \quad \boldsymbol{\psi}_y = v_y \mathbf{g} + \boldsymbol{\Phi}_y \quad , \quad \boldsymbol{\psi}_z = v_z \mathbf{g} + \boldsymbol{\Phi}_z\,,$$

dà luogo all'equazione

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_z}{\partial z} = \mathbf{F}\,,$$

dove le ψ, in base alle (1_d), verificano ancora le relazioni di simmetria

$$\psi_{zy} = \psi_{yz} \quad , \quad \psi_{xz} = \psi_{zx} \quad , \quad \psi_{yx} = \psi_{xy}\,.$$

Moltiplicando invece la (1_b) scalarmente per $\mathbf{v}$, la (1_c) algebricamente per $\frac{v^2}{2}$, e sommando membro a membro, si arriva, dopo facili trasformazioni del secondo membro, all'equazione

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu v^2}{2}\right)+\operatorname{div}\left(\frac{\mu v^2}{2}\mathbf{v}\right)+\operatorname{div}\Theta - \\ -\left[\Phi_x \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\Phi_y \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+\Phi_z \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right]=\mathbf{v}\times\mathbf{F},$$

dove si è posto

$$(5)\qquad \Theta=(\mathbf{v}\times\Phi_x)\,\mathbf{i}+(\mathbf{v}\times\Phi_y)\,\mathbf{j}+(\mathbf{v}\times\Phi_z)\,\mathbf{k}$$

($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vettori unitarî fondamentali).

3. Prima di procedere, giova fare un'osservazione di carattere matematico.

Sieno $\mathbf{v}$ ed f funzioni assegnate del posto (x, y, z) e del tempo, e si consideri l'equazione

$$(6)\qquad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}+\operatorname{div}(\varepsilon_1 \mathbf{v})=f$$

lineare a derivate parziali del 1° ordine rispetto alla funzione (scalare) ε_1 di x, y, z, t.

In virtù dei teoremi fondamentali d'esistenza, una tale equazione (soddisfatte che siano debite condizioni qualitative) determina completamente ε_1 in ogni istante, quando siano assegnati (per tutti i punti del campo che si considera) i suoi valori iniziali.

Prendiamo in particolare

$$f=-\left[\Phi_x \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\Phi_y \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+\Phi_z \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right],$$

e notiamo che le dimensioni di f sono con ciò quelle di una potenza per unità di volume ($l^{-1}\,t^{-3}\,m$ coi simboli di Maxwell). La incognita ε_1, ha in tal caso, come ovviamente apparisce dalla struttura del primo membro, le dimensioni $l^{-1}\,t^{-2}\,m$, cioè quelle di una densità d'energia.

Da quanto precede risulta che tale densità d'energia ε_1 viene determinata dalla (6) a meno di una, *a priori* arbitraria, distribuzione statica.

4. Vediamo di riconoscere, in alcuni casi particolari, ciò che effettivamente è la ε_1 dianzi introdotta.

Apparisce tosto che nei casi dinamici più semplici (solido rigido e fluido perfetto incomprimibile) la ε_1 si riduce a una costante. Infatti, l'esame del secondo membro della (6) mostra (avuto riguardo: nel primo caso alle condizioni di rigidità; nel secondo al fatto che gli sforzi si riducono alla pressione p, e che si ha $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$) che esso è nullo. La (6) s'integra allora, ponendo $\varepsilon_1 = \text{cost}$. Supponendo essere la ε_1 la densità d'una energia diversa dalla cinetica attribuita alla materia, essa è costante durante il moto. Difatti non esistono in questi sistemi scambi coll'esterno di energia che non sia cinetica.

Caso di un fluido perfetto comprimibile. — In questo caso, nell'equazione del moto i termini provenienti dagli sforzi si riducono a $-\text{grad}\, p$, e la (4) si scrive, conseguentemente,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu v^2}{2}\right) + \text{div}\left(\frac{\mu v^2}{2}\mathbf{v}\right) + \text{div}\, p\mathbf{v} - p\,\text{div}\,\mathbf{v} = \mathbf{v}\times\mathbf{F}\,. \tag{7}$$

Si osservi che div $\mathbf{v}$ è la dilatazione per unità di tempo θ, per cui, dopo introdotto il volume specifico $\nu = \frac{1}{\mu}$, si ha

$$\text{div}\,\mathbf{v} = \theta = \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dt}\,. \tag{8}$$

Integriamo la (7) ad uno spazio S: tenendo conto della precedente, si ha

$$\int_S \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu v^2}{2}\right) dS - \int_\sigma \frac{\mu v^2}{2}(\mathbf{v}\times\mathbf{n})\, d\sigma - \int_S p\theta\, dS =$$

$$= \int_S (\mathbf{v}\times\mathbf{F})\, dS + \int_\sigma p(\mathbf{v}\times\mathbf{n})\, d\varrho\,,$$

σ designando il contorno del campo S, ed $\mathbf{n}$ un vettore unitario diretto secondo la normale in un punto generico di σ, verso l'interno di S.

Il primo integrale del primo membro dà la variazione dell'energia cinetica contenuta in S, supposto fisso il contorno; il secondo rappresenta il flusso di tale energia attraverso il contorno: la loro differenza esprime quindi la variazione, nell'unità di tempo, dell'energia cinetica della massa racchiusa in S all'istante t. Poichè i due integrali del secondo membro ci dànno il lavoro delle forze, l'integrale $-\int_S p\theta\, dS$ deve rappresentare l'incremento dell'energia *interna* del fluido: in questo caso, della energia elastica, attesa la comprimibilità, e trattandosi d'un fluido perfetto.

Per l'equazione che definisce i gas perfetti, p è funzione della sola ν. Si ponga

$$p = -\frac{du(\nu)}{dt}\,. \tag{9}$$

Riconosceremo che la funzione $u(\nu)$, definita a meno di una costante, è l'energia interna per unità di massa. Poniamo infatti

$$E_i = \int u(\nu)\, dm\,,$$

ove l'integrale è esteso alla massa contenuta in S. Poichè dm non varia durante il moto, si può derivare sotto il segno rapporto a t: si avrà, badando che si può porre $dm = \frac{dS}{v}$ e ricordando le (8) e (9),

$$\frac{dE_i}{dt} = \int_S \frac{du}{dv}\frac{dv}{dt}\frac{1}{v}\, dS = -\int p\theta\, dS\,.$$

Per quanto si disse dell'ultimo integrale, apparisce che $u(v)$ è effettivamente l'energia interna del fluido per unità di massa.

A questo punto ripigliamo l'equazione (6), scrivendone il primo membro in forma diversa ma equivalente:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1 \operatorname{div} \mathbf{v} = -p \operatorname{div} \mathbf{v}\,.$$

Essa diventa, per la (8) e dopo aver moltiplicato per v,

$$v\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1\frac{dv}{dt} = -p\frac{dv}{dt}\,,$$

che può anche scriversi, tenendo presente la (9),

$$\frac{d}{dt}(v\varepsilon_1) = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}\,.$$

Un integrale si ha subito, ponendo

$$\varepsilon_1 = \frac{u}{v} = \mu u\,.$$

La ε_1 ci si presenta allora come l'energia interna del fluido per unità di volume.

Caso del solido elastico. — Osserviamo che per gli sforzi si può porre

$$\Phi_{xx} = -\frac{\partial \mathcal{E}_e}{\partial \xi_{xx}}\,,\quad \Phi_{yy} = -\frac{\partial \mathcal{E}_e}{\partial \xi_{yy}}\,,\ \ldots\,,\quad \Phi_{yz} = -\frac{\partial \mathcal{E}_e}{\partial \xi_{yz}}$$

essendo $\mathcal{E}_e$ il potenziale elastico, e le ξ le componenti di deformazione.

La (6) si scrive, in questo caso,

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon_1 \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathcal{E}_e}{\partial \xi_{xx}}\xi'_{xx} + \frac{\partial \mathcal{E}_e}{\partial \xi_{yy}}\xi'_{yy} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial \mathcal{E}_e}{\partial \xi_{xy}}\xi'_{xy} + \cdots + \frac{\partial \mathcal{E}_e}{\partial \xi_{zy}}\xi'_{zy}\,,$$

che equivale alla

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon_1 \mathbf{v}) = \frac{d\mathcal{E}_e}{dt}.$$

Nei limiti d'approssimazione della teoria dell'elasticità, è permesso di trattare, così la velocità come il potenziale $\mathcal{E}_e$, quali infinitesimi (di primo e di secondo ordine rispettivamente); e poichè, nello stesso àmbito d'approssimazione, la derivata totale coincide colla parziale, si può soddisfare alla precedente equazione assumendo $\varepsilon_1 = \mathcal{E}_e$, uguale cioè all'energia elastica del solido per unità di volume.

5. *Espressione del flusso d'energia.* — Ciò premesso, sostituiamo nella (4), a $\left(\boldsymbol{\Phi}_x \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \boldsymbol{\Phi}_y \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \boldsymbol{\Phi}_z \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right)$, il suo valore fornito dalla (6). Posto

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{\mu v^2}{2},$$

la (4) stessa diventa

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{v}) + \operatorname{div} \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{v} \times \mathbf{F}. \tag{4'}$$

Dalle considerazioni svolte nel numero precedente, siamo condotti a generalizzare, per un sistema continuo di tipo qualsiasi, la interpretazione di ε_1, risguardandola quale una energia addizionale (di specie dipendente dalla natura del mezzo) spettante alle singole particelle materiali. Il relativo trasporto s'opera quindi col moto della materia (al pari di ciò che avviene per l'energia cinetica). Allora la (4') ci dice che l'energia complessiva ε varia come se, venendo somministrato dall'esterno al sistema il lavoro delle forze di massa, il flusso d'energia fosse (a meno di un inessenziale vettore solenoidale) definito da

$$X = \varepsilon \mathbf{v} + \boldsymbol{\Theta}. \tag{10}$$

A giustificazione di questo asserto, basta considerare un generico spazio S, e notare che la variazione (nell'unità di tempo) dell'energia ivi distribuita, $\int_S \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dS$, può esser scritta, in virtù della (4'),

$$\int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{F})\, dS + \int_\sigma \chi_n \, d\sigma;$$

designando con σ il contorno di S, e con n la normale vòlta all'interno [1].

[1] Cfr., in proposito del flusso d'energia, Wien, Wied. Ann., 45, pag. 685, 1892; Volterra, Atti Acc. Torino, 34, pag. 366, 1899; oppure, in forma più comprensiva, la recente Nota della sig.na Ferrari, in questi Rendiconti, vol. XXII, pag. 761, 1° sem. 1913.

6. Concludendo, per quanto precede, vediamo che le equazioni della dinamica classica dei sistemi continui si possono presentare nella forma:

$$\mathbf{g} = \mu \mathbf{v}\,, \tag{11$_a$}$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \mathbf{F}\,, \tag{11$_b$}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \chi = \mathbf{v} \times \mathbf{F}\,, \tag{11$_c$}$$

dove le ψ si esprimono, secondo le (2), mediante gli sforzi, quantità di moto e velocità; la ε è somma dell'energia cinetica e della ε_1, integrale della (6), e X è il flusso d'energia definito dalla (10).

Meccanica. — *Una proprietà di ubicazione dell'ellisse centrale.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Sia σ una superficie piana che supporrò sempre di densità $\text{cost} = \varrho$, e convessa (senza escludere che il suo contorno γ possa presentare delle cuspidi). Chiamando $x\,, y$ i suoi assi centrali d'inerzia, r_x ed r_y i corrispondenti raggi di girazione, l'equazione

$$\frac{x^2}{r_y^2} + \frac{y^2}{r_x^2} = 1 \tag{1}$$

rappresenterà l'ellisse centrale. Mi propongo di dimostrare che tale ellisse è completamente interna a σ: ciò che in certo modo fa riscontro a una ben nota proprietà di ubicazione del baricentro di un'area piana convessa [2].

Per le aree σ che capita di considerare nella Meccanica applicata, la proprietà in questione si trova, caso per caso, sempre soddisfatta, e questo ha forse contribuito a fare adottare per l'ellisse (1) la denominazione di centrale. Nel caso generale — tenendo conto [3] che la distanza del baricentro da una tangente all'ellisse centrale coincide col raggio di girazione baricentrale corrispondente [4] — tale proprietà si può considerare come un corollario immediato del seguente teorema:

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1914.

[2] Si osservi, a questo proposito, che l'ellisse d'inerzia

$$r_x^2\, x^2 + r_y^2\, y^2 = \frac{1}{\varrho^2}$$

non può possedere una proprietà del genere di quella enunciata: non risultando la sua posizione rapporto a σ, invariante rispetto alla scelta delle unità di misura.

[3] Cfr., ad es., Levy, *La statique graphique et ses applications aux constructions* (Paris, Gauthier-Villars, 1907), 1ère Partie, § 245.

[4] Voglio dire, col raggio di girazione relativo all'asse baricentrale parallelo alla retta considerata.