ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

6. Concludendo, per quanto precede, vediamo che le equazioni della dinamica classica dei sistemi continui si possono presentare nella forma:

$$(11_a) \qquad \mathbf{g} = \mu \mathbf{v} ,$$

$$(11_b) \qquad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \mathbf{F} ,$$

$$(11_c) \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \chi = \mathbf{v} \times \mathbf{F} ,$$

dove le ψ si esprimono, secondo le (2), mediante gli sforzi, quantità di moto e velocità; la ε è somma dell'energia cinetica e della ε_1, integrale della (6), e X è il flusso d'energia definito dalla (10).

Meccanica. — *Una proprietà di ubicazione dell'ellisse centrale.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Sia σ una superficie piana che supporrò sempre di densità cost $= \varrho$, e convessa (senza escludere che il suo contorno γ possa presentare delle cuspidi). Chiamando x, y i suoi assi centrali d'inerzia, r_x ed r_y i corrispondenti raggi di girazione, l'equazione

$$(1) \qquad \frac{x^2}{r_y^2} + \frac{y^2}{r_x^2} = 1$$

rappresenterà l'ellisse centrale. Mi propongo di dimostrare che tale ellisse è completamente interna a σ: ciò che in certo modo fa riscontro a una ben nota proprietà di ubicazione del baricentro di un'area piana convessa [2].

Per le aree σ che capita di considerare nella Meccanica applicata, la proprietà in questione si trova, caso per caso, sempre soddisfatta, e questo ha forse contribuito a fare adottare per l'ellisse (1) la denominazione di centrale. Nel caso generale — tenendo conto [3] che la distanza del baricentro da una tangente all'ellisse centrale coincide col raggio di girazione baricentrale corrispondente [4] — tale proprietà si può considerare come un corollario immediato del seguente teorema:

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1914.

[2] Si osservi, a questo proposito, che l'ellisse d'inerzia

$$r_x^2 \, x^2 + r_y^2 \, y^2 = \frac{1}{\varrho^2}$$

non può possedere una proprietà del genere di quella enunciata: non risultando la sua posizione rapporto a σ, invariante rispetto alla scelta delle unità di misura.

[3] Cfr., ad es., Levy, *La statique graphique et ses applications aux constructions* (Paris, Gauthier-Villars, 1907), 1ère Partie, § 245.

[4] Voglio dire, col raggio di girazione relativo all'asse baricentrale parallelo alla retta considerata.

Per un'area σ il rapporto tra la distanza del baricentro da una tangente al contorno, e il raggio di girazione baricentrale corrispondente, non è mai inferiore a $\sqrt{2}$ (cioè al valore che esso assume allora, e allora soltanto, che σ sia un triangolo, e la tangente considerata coincida con uno dei suoi lati).

Le semplici considerazioni di cui mi sono valso per dimostrare questo teorema, mi hanno anche permesso di dare la soluzione completa del problema seguente: Date tre rette parallele τ, τ_1, τ_2, determinare, tra tutte le superficie σ tangenti a τ_1 e τ_2, quelle che, supposte omogenee, hanno, rispetto a τ, il massimo raggio di girazione.

1. Siano:

β un asse baricentrale di σ;

B e B' i suoi punti d'incontro con γ;

τ_1 e τ_2 le due tangenti a γ parallele a β;

$T_1(T_2)$ l'estremo del segmento di contatto tra $\tau_1(\tau_2)$ e γ (¹), che prima s'incontra quando sopra γ si va da B a B' senza toccare $\tau_2(\tau_1)$;

γ_1 e γ_2 le due parti in cui l'arco $T_1 BT_2$ risulta diviso dal punto B;

X(Y) un punto qualunque di $\gamma_1(\gamma_2)$.

Escludiamo che l'arco T_1BT_2 coincida totalmente col segmento T_1T_2, e, detti rispettivamente P, Q, R i punti d'incontro con t_1, b, t_2 della retta XY (che, ove sia $X \equiv Y \equiv B$, intenderemo coincidente colla tangente in B a γ_2), prendiamo a considerare i momenti statici M_β, rispetto a β, dei due triangoli curvilinei BYQ, RYT_2 (supposti, s'intende, ambedue di densità cost $= \varrho$).

$M_\beta(BYQ)$ è nullo per $Y \equiv B$ e, al variare di Y da B a T_2, non decresce mai: $M_\beta(RYT_2)$ non cresce mai al variare di Y da B a T_2, e per $Y \equiv T_2$ si annulla. Potremo dunque far corrispondere ad ogni posizione di X una posizione Y_x di Y per la quale, dette P_x, Q_x, R_x le rispettive posizioni di P, Q, R, risulti

$$M_\beta(BY_x Q_x) = M_\beta(R_x Y_x T_2):$$

e ciò in un sol modo, tutte le volte che l'arco XBT_2 non si riduca al segmento XT_2, nel qual caso, per qualunque posizione di Y, risulta

$$M_\beta(BYQ) = M_\beta(RYT_2) = 0 .$$

Contrassegniamo ancora con M_β i momenti statici, rispetto a β, dei due triangoli curvilinei BXQ_x e P_xXT_1 (supposti anch'essi ambedue di densità cost $= \varrho$). Per $X \equiv B$, è $M_\beta(BXQ_x) = 0$; per $X \equiv T_1$, è $M_\beta(P_xXT_1) = 0$; d'altra parte i due momenti considerati variano con continuità al variare

(¹) Le ipotesi fatte rispetto a γ, non escludono che esso possa avere dei tratti rettilinei.

di X, e inoltre, per l'esclusione fatta, non possono annullarsi contemporaneamente. Se ne deduce che, dentro l'arco BT_1, esisterà almeno una posizione X^* di X (¹) tale che, dette Y^*, P^*, Q^*, R^* le posizioni corrispondenti di Y_x, P_x, Q_x, R_x, non solo sarà

$$M_\beta(BY^*Q^*) = M_\beta(RY^*T_2)\,, \tag{2}$$

ma anche

$$M_\beta(BX^*Q^*) = M_\beta(P^*X^*T_1) \neq 0\,. \tag{3}$$

Sia allora σ' la superficie piana limitata dall'arco $T_1B'T_2$ e dalla spezzata $T_1P^*R^*T_2$. In conseguenza delle (2), (3), è subito visto che σ' (supposta omogenea), avrà, come σ, il suo baricentro su β. È poi facile di convincersi che il suo raggio di girazione rispetto a β sarà sempre maggiore di quello di σ. Invero — designando con (BY^*Q^*) e $I_\beta(BY^*Q^*)$ l'area e il momento d'inerzia, rispetto a β, del triangolo curvilineo BY^*Q^*, e adottando notazioni analoghe per le altre superficie che occorre considerare — poichè ogni punto di $R^*Y^*T_2$ (di $P^*X^*T_1$) è più discosto da β che non ogni punto di BY^*Q^* (di BX^*Q^*), avremo (²), per la (2),

$$\begin{cases} (BY^*Q^*) \geq (R^*Y^*T_2) \\ I_\beta(BY^*Q^*) \leq I_\beta(R^*Y^*T_2)\,, \end{cases}$$

e, per la (3),

$$\begin{cases} (BX^*Q^*) > (P^*X^*T_1) \\ I_\beta(BX^*Q^*) < I_\beta(P^*X^*T_1)\,. \end{cases}$$

Dopo questo, con un'ovvia ripetizione del ragionamento ora svolto, si perviene alla conclusione che, se σ non è un trapezio avente le basi su τ_1 e τ_2, si può sempre costruire un trapezio di tale specie che, supposto omogeneo, contemporaneamente goda delle seguenti proprietà:

1°) abbia il suo baricentro su β;

2°) abbia, rispetto a β, un raggio di girazione superiore a quello di σ.

(¹) Facilmente si potrebbe provare che X^* risulta univocamente determinato.

(²) Sia infatti $f(x)$ una funzione di x mai negativa negli intervalli (a,b) e (c,d) ove

$$0 \leq a < b \leq c < d\,.$$

Se è

$$\int_a^b x\, f(x)\, dx = \int_c^d x\, f(x)\, dx \neq 0\,,$$

sarà pure

$$\int_a^b f(x)\, dx > \frac{1}{b}\int_a^b x\, f(x)\, dx > \frac{1}{c}\int_c^d x\, f(x)\, dx > \int_c^d f(x)\, dx\,,$$

e

$$\int_a^b x^2 f(x)\, dx < b\int_a^b x\, f(x)\, dx < c\int_c^d x\, f(x)\, dx < \int_c^d x^2 f(x)\, dx\,.$$

2. In un trapezio omogeneo di basi a, b e di altezza h, la distanza del baricentro da a è

$$d = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}, \tag{4}$$

e il raggio di girazione rispetto ad a:

$$r = h \sqrt{\frac{a + 3b}{6(a + b)}}.$$

In conseguenza, detto r_β il raggio di girazione relativo all'asse baricentrale β parallelo alle basi, si ha:

$$\left(\frac{r_\beta}{d}\right)^2 = \frac{r^2}{d^2} - 1 = \frac{h^2}{6d^2}\left\{1 + \frac{2}{1 + \frac{a}{b}}\right\} - 1;$$

ed anche $\left(\text{poichè } \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{3d}{h} - 1\right)$:

$$\left(\frac{r_\beta}{d}\right)^2 = \frac{h^2}{6d^2}\left\{\frac{6d}{h} - 1\right\} - 1. \tag{5}$$

Se ne deduce che, fissato h, il rapporto $\frac{r_\beta}{d}$ assume il suo massimo valore per $d = \frac{h}{3}$, cioè [essendo in tal caso, per la (4). $b = 0$] quando il trapezio considerato si riduca ad un triangolo con un lato parallelo a β.

Questo fatto, posto in relazione colla conclusione finale del paragrafo precedente, fornisce senz'altro la dimostrazione completa del teorema enunciato.

3. Mantenendo le denominazioni del § 1, sia τ una retta parallela a β (e non necessariamente complanare a σ), τ' la sua proiezione sul piano di σ, s la distanza tra τ e τ'.

Riferito il piano di σ ad un sistema cartesiano ortogonale in cui la retta τ' coincida coll'asse delle y, siano $x_1 . x_2$ e $x_1 + d_1$ i valori di x corrispondenti alle rette τ_1, τ_2 e β. Se fissiamo il verso positivo dell'asse delle x in modo che risulti $d_1 > 0$ (e quindi anche $x_2 - x_1 > 0$), pur di supporre che la distanza di τ' e τ_1 non superi la distanza di τ' e τ_2, risulterà anche

$$x_1 + x_2 \geq 0.$$

Colle denominazioni adottate, detti r_τ, r_{τ_1} i raggi di girazione di σ rispetto a τ e τ_1, avremo

$$r_\tau^2 = r_{\tau_1}^2 + (d_1 + x_1)^2 + s^2 - d_1^2.$$

D'altra parte, per le conclusioni dei precedenti paragrafi [in particolare per la (5)], si ha

$$r_{\tau_1}^2 \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{6}\left\{\frac{6d_1}{x_2 - x_1} - 1\right\}.$$

Ne segue

$$(6) \qquad r_{\tau_1}^2 \leq d_1(x_1 + x_2) + s^2 + x_1^2 - \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^2,$$

ove, come nella precedente relazione, varrà il segno di eguaglianza, allora, e allora soltanto, che σ sia un trapezio colle basi su τ_1 e τ_2.

Rileviamo inoltre che, qualunque sia σ, è

$$(7) \qquad \frac{1}{3}(x_2 - x_1) \leq d_1 \leq \frac{2}{3}(x_2 - x_1),$$

valendo il primo (secondo) segno di eguaglianza allora, e allora soltanto, che σ sia un triangolo con un lato su τ_1(su τ_2) e il vertice opposto su τ_2 (su τ_1). Invero, se σ è un trapezio colle basi su τ_1 e τ_2, la (7) è una conseguenza immediata della (4): se σ non è un trapezio colle basi su τ_1 e τ_2, la (7) si presenta ancora come una conseguenza della (4), quando si tenga conto che si può sempre (come abbiamo visto al § 1) costruire un tale trapezio che abbia il baricentro su β [1].

In base alla (7), dalla (6) si deduce

$$r_\tau^2 \leq \frac{l}{6}(3x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + s^2,$$

[1] La (7) si può dimostrare direttamente nel modo seguente: Sia $\sigma_1(\sigma_2)$ la parte di σ compresa nella striscia limitata dalle due rette parallele β e $\tau_1(\beta$ e $\tau_2)$. Poichè γ è convesso, il triangolo $\sigma_2^\star$ di vertici B, B', T_2 sarà necessariamente contenuto in σ_2: di più, se si esclude che sia

$$d_1 > \frac{1}{3}(x_1 - x_2),$$

sempre perchè γ è convesso, bisognerà ammettere che tra i parallelogrammi aventi una delle basi coincidente con BB', e l'altra situata su τ_1 ed $= \frac{3}{2}$ BB', ne esista almeno uno, $\sigma_1^\star$, contenente σ_1. Supposte le superficie $\sigma_1, \sigma_1^\star, \sigma_2, \sigma_2^\star$ tutte e quattro di densità cost $= \varrho$, poichè i momenti statici di σ_1 e σ_2 rispetto all'asse baricentrale β sono eguali, il momento statico rispetto a β di $\sigma_2^\star$ non potrà superare quello di $\sigma_1^\star$. Ne segue, detta b la lunghezza di BB',

$$\frac{b(x_2 - x_1 - d_1)^2}{6} \leq \frac{2b\,d_1^2}{3}$$

cioè

$$d_1 \geq \frac{1}{3}(x_2 - x_1).$$

valendo il segno di eguaglianza allora, e allora soltanto, che σ sia un triangolo con un lato su τ_2, e il vertice opposto su τ_1. In definitiva possiamo dunque concludere che:

Fra tutte le superfici σ tangenti a τ_1 e τ_2 il massimo valore di r_τ corrisponde ai triangoli aventi un lato su τ_2 e il vertice opposto su τ_1, per ognuno dei quali è

$$r_\tau = \sqrt{\frac{1}{6}(3x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + s^2} \,.$$

Fisica. — *Sul lampo*. Nota del prof. V. Monti, presentata dal Corrisp. A. Battelli [1].

1. — Lo studio fotografico del lampo con lastre in movimento ha mostrato da tempo che la scarica temporalesca consta d'una serie di scariche elementari, succedentisi a brevi intervalli di tempo, lungo un medesimo canale atmosferico. Per lo più la precede e prepara una serie di fiocchi o pennacchi elettrici, che si allungano sempre più, fino a trasformarsi nella vera e propria scintilla.

Qualche considerazione, forse non inutile, potrà farsi su questo argomento, comparando le condizioni del lampo a quelle che per la scarica a pennacchio sperimentale sono state fissate dai fisici. Una sintesi di tali condizioni costituisce la teoria di questo genere di scarica, teoria che è stata enunciata da Przibram (*Wien. Ber.*, 1904). La comparazione in parola è tanto più autorizzata, in quanto che l'intensità del campo atmosferico necessaria alla produzione delle scariche temporalesche è dell'ordine 10^4 volt-cm. (cfr. Schmidt, *Met. Zeitschr.*, 1907), cioè dell'ordine medesimo dell'intensità necessaria a produrre le scariche sperimentali.

La teoria citata importa che la lunghezza di un pennacchio elettrico sia in relazione colla mobilità specifica degli ioni, e che sia maggiore quando:

a) è maggiore il ritardo della scarica;

b) è maggiore l'intensità della corrente che carica l'elettrodo da cui si spicca il pennacchio;

c) è minore l'intensità del campo necessario alla ionizzazione per urto, cioè è maggiore il medio cammino libero degli ioni.

Oltre a ciò, la lunghezza del pennacchio dipende dalla capacità dell'elettrodo in modo complesso, a cui si accennerà più avanti.

Volendo estendere questi risultati alla scarica temporalesca, bisognerà considerare come elettrodi quelle parti delle nubi o del suolo che si scari-

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1914.