ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

interno col tempo calcolato. Non può, del resto, escludersi che i tempi calcolati sieno, in realtà, più grandi dei veri.

Le nubi ci impedirono di osservare il secondo contatto interno ed il secondo contatto esterno e così non ci permisero di accertare se le osservazioni dei due ultimi contatti conducevano alla stessa conclusione tratta dalle osservazioni dei due primi.

Fisiologia. — *Ricerche sul muscolo retractor penis (e su altri organi muscolari lisci).* Memoria del Corrisp. F. BOTTAZZI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Matematica. — *Sull'equazione integrale di 1ª specie.* Nota del dott. ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Il Picard, utilizzando un teorema del Riesz (Comptes Rendus, 14 juin 1909), aveva già dimostrato che *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale di 1ª specie*

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\, h(t)\, dt\,,$$

a caratteristica chiusa, ammetta una soluzione, è che la serie

$$\sum_\nu \lambda_\nu^2 d_\nu^2 = \sum_\nu \lambda_\nu^2 \left\{ \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt \right\}^2$$

sia convergente. Subito dopo, il Lauricella [1] estendeva i risultati del Picard ad equazioni a caratteristica qualunque, aggiungendovi la condizione che *la g(s) debba necessariamente avere la forma*:

$$g(s) = \sum_\nu d_\nu\, \varphi_\nu(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(r)\, \varphi_\nu(r)\, dr\,.$$

Come ognuno vede, tanto la condizione del Picard, quanto quella del Lauricella, presentano l'inconveniente di esigere la conoscenza degli autovalori, e delle autofunzioni del nucleo dato.

Mi ero proposto di risolvere la stessa questione indipendentemente da tale conoscenza; ma finora non vi sono riuscito se non in un caso particolare, che del resto, in pratica, si presenta non molto raramente. Cionondimeno non credo inutile di esporre, in questa breve Nota, il risultato ottenuto, più

(1) *Sull'equazione integrarale di 1ª specie*, Rend. Acc. Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 2º sem., fasc. 3º.

che per la sua importanza, pel metodo da me seguito, il quale mi pare possa venire, con qualche utilità, impiegato nella trattazione delle questioni, che riguardano le equazioni integrali di 1ª specie.

2. Abbiasi l'equazione a nucleo simmetrico:

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt. \tag{1}$$

Formiamo la successione:

$$g_1(s) = \int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt$$

$$g_2(s) = \int_a^b K(s, t)\, g_1(t)\, dt$$

$$g_3(s) = \int_a^b K(s, t)\, g_2(t)\, dt$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_n(s) = \int_a^b K(s, t)\, g_{n-1}(t)\, dt. \tag{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dopo aver posto:

$$V_n = \int_a^b \{g_n(s)\}^2\, ds\,,$$

si moltiplichi la (2) per $g_n(s)$ e si integri; si ha l'eguaglianza:

$$V_n = \int_a^b g_{n+1}(s)\, g_{n-1}(s)\, ds\,, \tag{3}$$

dalla quale, in grazia della disuguaglianza di Schwarz, deriva:

$$V_n^2 \leq V_{n+1}\, V_{n-1}$$

cioè:

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}.$$

Posto:

$$c_n = \frac{V_{n+1}}{V_n}\,,$$

sarà, quindi:

$$c_{n-1} \leq c_n\,.$$

Osserviamo subito che nessuna delle $g_n(s)$ può essere identicamente nulla. Infatti, se fosse, per esempio, $g_n(s) = 0$, per la (3) dovrebbe essere

$V_n = 0$, e quindi anche $g_n(s) = 0$; questo ragionamento, ripetuto n volte, ci porterebbe a concludere che dovebbe pure essere $g(s) = 0$, contro l'ipotesi.

La disuguaglianza di Schwarz, applicata alla (2), ci dà ancora:

$$\{g_n(s)\}^2 \leq \int_a^b \{K(s,t)\}^2 dt \cdot \int_a^b \{g_{n-1}(t)\}^2 dt,$$

da cui, integrando:

$$V_n \leq \int_a^b \int_a^b \{K(s,t)\}^2 ds\, dt \,.\, V_{n-1}\,.$$

cioè:

$$C_{n-1} \leq \int_a^b \int_a^b \{K(s,t)\}^2 ds\, dt$$

Si potrà quindi scrivere:

$$\lim_{n=\infty} C_n = C\,,$$

dove C è una quantità finita.

3. Facciamo la convenzione che sia $g_0(s) = g(s)$, e riprendiamo l'uguaglianza:

$$g_{n-r}(s) = \int_a^b K(s,t)\, g_{n-r-1}(t)\, dt\,,$$

dove $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Si moltiplichino ambo i membri per $g_{n+r}(s)$, e si integri da a e b; si ottiene:

$$\int_a^b g_{n-r}(s)\, g_{n+r}(s)\, ds = \int_a^b g_{n-r-1}(s)\, g_{n+r+1}(s)\, ds\,,$$

da cui, per la (3),

$$\text{(4)} \qquad \int_a^b \{g_n(s)\}^2 ds = \int_a^b g_{n-r}(s)\, g_{n+r}(s)\, ds\,.$$

5. Ciò premesso, consideriamo ora il caso particolare (che però nella pratica si presenta abbastanza frequentemente) che sia:

$$\text{(5)} \qquad c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = \cdots c_n = \cdots = c\,,$$

e dimostriamo che la (1) ammette soluzione.

Infatti, poichè, sotto quest' ipotesi, è

$$\frac{V_n}{c^n} = \frac{V_n}{c_0\, c_1 \ldots c_{n-1}} = V_0,$$

sarà, per le (4),

$$\int_a^b \left\{ g(s) - \frac{g_{2n}(s)}{c^n} \right\}^2 ds = V_0 - 2V_0 + V_0 = 0\,,$$

e quindi

$$g(s) = \frac{g_{2n}(s)}{c^n}$$

ed anche, valendo questa relazione qualunque sia n,

$$g(s) = \frac{g_2(s)}{c}. \tag{6}$$

Sarà allora (notando che $c = c_0$):

$$\frac{g_2(s)}{c_0} = \int_a^b \mathrm{K}(s, t) \frac{g_1(t)}{c_0} dt .$$

La (1) ammette quindi soluzione; in inoltre si ha

$$h(t) = \frac{g_1(t)}{c_0}. \tag{7}$$

Sarà bene notare che le condizioni (5) e (6) si equivalgono.

Invero, moltiplicando, ambo i membri della (6) per $g_{2n}(s)$ ed integrando, si ha (essendo $c = c_0$):

$$\mathrm{V}_n = \frac{\mathrm{V}_{n+1}}{c_0}$$

cioè, qualunque sia n:

$$c_0 = c_n .$$

6. I precedenti risultati si possono facilmente estendere alle equazioni a nucleo non simmetrico.

Posto:

$$\mathrm{H}(s, t) = \int_a^b \mathrm{K}(r, s)\, \mathrm{K}(r, t)\, dr$$

$$\mathrm{G}(s) = \int_a^b \mathrm{K}(r, s)\, g(r)\, dr ,$$

moltiplicando la (1) per $\mathrm{K}(r, s)$ ed integrando, si ha l'equazione a nucleo simmetrico:

$$\mathrm{G}(s) = \int_a^b \mathrm{H}(s, t)\, h(t)\, dt . \tag{1'}$$

Se quindi la $\mathrm{G}(s)$ si potrà mettere sotto la forma:

$$\mathrm{G}(s) = \frac{\mathrm{G}_2(s)}{\Gamma_0}, \tag{8}$$

dove Γ_0 ha un significato analogo a quello di c_0 del caso precedente, la (1'), e quindi anche la (1), ammetterà soluzione, e sarà

(9) $$h(t) = \frac{G_1(s)}{\Gamma_0}.$$

Riassumendo:

Condizione sufficiente affinché l'equazione (1) *ammetta soluzione, è che la* $g(s)$ *si possa mettere sotto la forma* (6) *se il nucleo è simmetrico, o la* $G(s)$ *sotto la forma* (8) *se non lo è; in tali casi, le* (7) *e* (9) *rappresenteranno rispettivamente una soluzione dell'equazione data.*

Meccanica. — *Sopra una estensione delle equazioni generali dell'elasticità.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio V. Volterra.

1. *Richiamo della ordinaria teoria dell'equilibrio elastico.* — Sieno x, y, z le coordinate di un punto P dello spazio S occupato da un solido elastico; u, v, w le componenti dello spostamento di P. La deformazione della particella attigua al punto P è caratterizzata, com'è noto, dalle sei quantità seguenti:

(1) $$\gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots ; \gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \dots$$

Lo stato di tensione nella particella stessa è definito dai sei sforzi interni fondamentali: $\tau_{11}, \dots ; \tau_{23} = \tau_{32}, \dots$

In condizioni di equilibrio, si deve avere:

(2) $$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = \varrho X, \dots ; \quad \text{in } S,$$

essendo ϱ la densità, e X, Y, Z le componenti della forza unitaria di massa.

Sul contorno σ di S si deve avere:

(3) $$\tau_{11}\cos(nx) + \tau_{12}\cos(ny) + \tau_{13}\cos(nz) = L, \dots ; \quad \text{sopra } \sigma,$$

n essendo la normale a σ vòlta verso S, e L, ... le componenti degli sforzi esterni esercitantisi sopra σ.

Per stabilire le equazioni generali della elasticità, bisogna ricorrere ad una legge sperimentale che leghi lo stato di deformazione, rappresentato analiticamente dalle quantità γ_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ allo stato di tensione definito dalle τ_{rs}. La legge che è fondamento della classica teoria della elasticità è quella enunciata da Hooke. Secondo tale legge, *le caratteristiche di deformazione* (γ_{rs}) *sono funzioni lineari ed omogenee degli sforzi fondamentali* (τ_{rs}), cioè

(4) $$\gamma_{rs} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_{rs}} = -\sum_{1}^{3}{}_{lm}\, c_{rs,lm}\, \tau_{lm},$$