ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

dove Γ_0 ha un significato analogo a quello di c_0 del caso precedente, la (1'), e quindi anche la (1), ammetterà soluzione, e sarà

$$h(t) = \frac{G_1(s)}{\Gamma_0}. \tag{9}$$

Riassumendo:

Condizione sufficiente affinchè l'equazione (1) *ammetta soluzione, è che la* $g(s)$ *si possa mettere sotto la forma* (6) *se il nucleo è simmetrico, o la* $G(s)$ *sotto la forma* (8) *se non lo è; in tali casi, le* (7) *e* (9) *rappresenteranno rispettivamente una soluzione dell'equazione data.*

Meccanica. — *Sopra una estensione delle equazioni generali dell'elasticità.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio V. Volterra.

1. *Richiamo della ordinaria teoria dell'equilibrio elastico.* — Sieno x, y, z le coordinate di un punto P dello spazio S occupato da un solido elastico; u, v, w le componenti dello spostamento di P. La deformazione della particella attigua al punto P è caratterizzata, com'è noto, dalle sei quantità seguenti:

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots ; \; \gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \ldots \tag{1}$$

Lo stato di tensione nella particella stessa è definito dai sei sforzi interni fondamentali: $\tau_{11}, \ldots ; \tau_{23} = \tau_{32}, \ldots$

In condizioni di equilibrio, si deve avere:

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = \varrho X, \ldots ; \quad \text{in S}, \tag{2}$$

essendo ϱ la densità, e X, Y, Z le componenti della forza unitaria di massa.

Sul contorno σ di S si deve avere:

$$\tau_{11} \cos(nx) + \tau_{12} \cos(ny) + \tau_{13} \cos(nz) = L, \ldots ; \quad \text{sopra } \sigma, \tag{3}$$

n essendo la normale a σ vòlta verso S, e L, ... le componenti degli sforzi esterni esercitantisi sopra σ.

Per stabilire le equazioni generali della elasticità, bisogna ricorrere ad una legge sperimentale che leghi lo stato di deformazione, rappresentato analiticamente dalle quantità γ_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ allo stato di tensione definito dalle τ_{rs}. La legge che è fondamento della classica teoria della elasticità è quella enunciata da Hooke. Secondo tale legge, *le caratteristiche di deformazione* (γ_{rs}) *sono funzioni lineari ed omogenee degli sforzi fondamentali* (τ_{rs}), cioè

$$\gamma_{rs} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_{rs}} = -\sum_{1}^{3}{}_{lm}\, c_{rs,lm}\, \tau_{lm}, \tag{4}$$

oppure

$$\tau_{rs} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{rs}} = -\sum_{1}^{3}{}_{lm}\, c'_{rs,lm}\, \gamma_{lm}\,, \tag{5}$$

essendo

$$2\Pi = -\sum_{1}^{3}{}_{rslm}\, c_{rs,lm}\, \gamma_{rs}\, \gamma_{lm} = -\sum_{1}^{3}{}_{rslm}\, c'_{rs,lm}\, \tau_{rs}\, \tau_{lm} \tag{6}$$

il potenziale elastico espresso in funzione delle γ_{rs} oppure delle τ_{rs}.

I 21 coefficienti (distinti) $c_{rs,lm}$, oppure i 21 moduli $c'_{rs,lm}$ sono da ritenersi, in generale, funzioni di x, y, z, dipendenti dalla natura del corpo elastico. Sostituendo in (5), alle γ_{lm}, le loro espressioni (1), e portando poi le espressioni così ottenute per le τ_{rs}, nelle (2), si avrà un sistema di tre equazioni lineari del secondo ordine nelle funzioni incognite u, v, w di x, y, z. Le condizioni al contorno (3) sono invece di primo ordine nelle u, v, w.

Se il corpo è omogeneo ed isotropo, $c_{rs,lm}$ e $c'_{rs,lm}$ sono costanti, e si riducono a due soltanto. Posto

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

le equazioni dell'equilibrio elastico diventano allora, notoriamente,

$$(A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + B\Delta_2 u = \varrho X\,, \ldots, \ldots; \quad \text{in } S\,, \tag{7}$$

e

$$(A - 2B)\,\Theta \cos(nx) + \\ + B\,\{2\gamma_{11}\cos(nx) + \gamma_{12}\cos(ny) + \gamma_{13}\cos(nz)\} = L\,, \ldots \tag{8}$$

sopra σ; avendo chiamato A e B le due costanti di isotropia.

2. *L'ipotesi ereditaria di Volterra.* — Le formule (4) — espressione analitica della legge di Hooke — definiscono la deformazione IN UN PUNTO IN UN DATO ISTANTE mediante lo stato di tensione IN QUEL PUNTO E IN QUELL'ISTANTE. Per esse, la deformazione dipende unicamente dagli sforzi *locali* ed *attuali*: escludono cioè da un lato che ad individuare la deformazione in un determinato posto concorrano, oltre che i valori degli sforzi in quel posto, anche quelli relativi alle altre particelle dello stesso corpo; ed escludono inoltre, d'altro lato, le azioni ereditarie.

Di quest'ultima circostanza ebbe a preoccuparsi il Volterra, e su essa mi soffermerò ora. Sulla prima ritornerò fra poco.

Il Volterra propone, volendo tener conto della eredità, di correggere le (4) nel modo seguente [1]:

$$(9) \qquad \gamma_{rs} = -\sum_{1\,lm}^{3} c_{rs,lm}\,\tau_{lm} + \Gamma_{rs}\left\| \left[\overset{t}{\underset{-\infty}{\tau_{11}}}, \ldots \middle| t \right] \right\| ,$$

dove Γ_{rs} dipendono da tutti i valori degli sforzi che si sono esercitati su P, negli istanti antecedenti all'attuale. In tal modo il Volterra viene ad esprimere analiticamente, e nel modo più generale, che la deformazione attuale in P non dipende solo dagli sforzi attuali, ma da tutta la serie degli sforzi che si sono anteriormente esercitati sopra P.

Che se si vuole conservare, anche rispetto alle azioni ereditarie, l'ipotesi lineare già esistente nella legge di Hooke, basta immaginare di sviluppare Γ_{rs} in serie analoghe a quelle di Taylor e trascurare i termini non lineari. Alle (9) vanno allora sostituite le seguenti relazioni:

$$(10) \qquad \gamma_{rs}(t) = -\sum_{1}^{3}{}_{lm}\, c_{rs,lm}\,\tau_{lm}(t) - \int_{-\infty}^{t} \sum_{1}^{3}{}_{lm}\, \varphi_{rs,lm}(t\,,t_1)\,\tau_{lm}(t_1)\,dt_1 ,$$

e si è nel caso che il Volterra denomina *eredità lineare*. I coefficienti $\varphi_{rs,lm}(t\,,t_1)$ dovranno dirsi *coefficienti di eredità*.

Se è, o può ritenersi, trascurabile l'influenza ereditaria anteriore ad un istante t_0, allora il limite inferiore ($-\infty$) dell'integrale va sostituito con t_0.

Immaginiamo in pari tempo di risolvere le (10) rispetto agli sforzi τ_{rs}; si ottiene, notoriamente,

$$(11) \qquad \tau_{rs}(t) = -\sum_{1}^{3}{}_{lm}\, c'_{rs,lm}\,\gamma_{lm}(t) - \int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{3}{}_{lm}\, \psi_{rs,lm}(t\,,t_1)\,\gamma_{lm}(t_1)\,dt_1 .$$

Queste formule definiscono lo stato attuale di tensione di un elemento mediante la storia delle deformazioni subìte da quell'elemento dall'istante t_0 all'istante t.

Sostituendo in (2) e (3), per τ_{rs}, le espressioni (11), e per γ_{lm} le espressioni (1), si ottengono delle equazioni *integro-differenziali* nelle funzioni incognite u, v, w. Così, mentre, nel caso classico [n. 1], le equazioni dell'equilibrio elastico sono differenziali, quando si tiene conto della eredità esse diventano integro-differenziali.

[1] Cfr., p. es., le recenti *Leçons sur les fonctions de lignes* [Paris, Gauthier-Villars, 1913, cap. VI].

Se il corpo è omogeneo ed isotropo, le (7) e (8) diventano, allora,

$$(12)\quad \begin{cases} (\mathrm{A}-\mathrm{B})\dfrac{\partial\Theta(t)}{\partial x}+\mathrm{B}\underset{2}{\Delta}u(t)+ \\ \quad +\displaystyle\int_{t_0}^{t}\Big\{[\varphi(t,t_1)-\psi(t,t_1)]\frac{\partial\Theta(t_1)}{\partial x}+\psi(t,t_1)\underset{2}{\Delta}u(t_1)\Big\}\,dt_1=\varrho\mathrm{X}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

in S; mentre sul contorno σ si deve avere

$$(13)\quad \begin{cases} (\mathrm{A}-2\mathrm{B})\,\Theta(t)\cos(nx)+\mathrm{B}\{2\gamma_{11}\cos(nx)+\gamma_{12}\cos(ny)+\gamma_{13}\cos(nz)\}+ \\ \quad +\displaystyle\int_{t_0}^{t}\{[\varphi(t,t_1)-2\psi(t,t_1)]\,\Theta(t_1)\cos(nx)+ \\ \quad +\psi(t,t_1)\,[2\gamma_{11}(t_1)\cos(nx)+\gamma_{12}(t_1)\cos(ny)+ \\ \quad +\gamma_{13}(t_1)\cos(nz)]\}\,dt_1=\mathrm{L}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

intendendo che, in queste ultime, le γ_{lm} debbano sostituirsi colle (1).

3. *Nuova ipotesi delle azioni contemporanee.* — Occupiamoci ora dell'altra circostanza rilevata nel numero precedente, e relativa al carattere locale della legge di Hooke, secondo la quale *la deformazione di una molecola* (in un istante generico) *dipende unicamente dallo stato di tensione in quella molecola* (nello stesso istante); viene in tal modo escluso che alla deformazione di una particella del mezzo elastico possa contribuire lo stato generale di tensione cui trovasi sottoposto tutto il mezzo.

Se si vuole introdurre il criterio delle *azioni contemporanee*: se si vuole cioè tenere conto anche dell'influenza che tutti gli sforzi relativi a tutte le particelle del corpo elastico possono avere sulla deformazione di una di esse, converrà anche qui, trasportando il concetto di Volterra dal tempo allo spazio, sostituire alle (4) le formule seguenti:

$$(14)\qquad \gamma_{rs}=-\sum_{1}^{3}{}_{lm}\,c_{rs,lm}\,\tau_{lm}+\boldsymbol{\Gamma}_{rs}\left|\left[\overset{\mathrm{S}}{\underset{\mathrm{S}}{\tau_{11},\ldots,\tau_{12}}}\right]\right|,$$

dove le $\boldsymbol{\Gamma}_{rs}$ dipendono da tutti i valori degli sforzi τ_{rs} nello spazio S occupato dal solido elastico.

Ancor qui, se si immagina di sviluppare le $\boldsymbol{\Gamma}_{rs}$ in serie analoghe a quella di Taylor, e si trascurano i termini non lineari, ci mettiamo, rispetto alle azioni contemporanee, nelle stesse condizioni lineari della legge di Hooke, e della eredità lineare di Volterra. Le (14) divengono allora (ipotesi della *contemporaneità lineare*)

$$(15)\qquad \gamma_{rs}(\mathrm{P})=-\sum_{1}^{3}{}_{lm}\,c_{rs,lm}\,\tau_{lm}(\mathrm{P})-\int_{\mathrm{S}}\sum_{1}^{3}{}_{lm}\,\Phi_{rs,lm}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,\tau_{lm}(\mathrm{Q})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{Q}}.$$

I coefficienti $\Phi_{rs,lm}(P, Q)$, che rappresentano l'influenza che lo stato di tensione in Q esercita sulla deformazione in P, saranno da dirsi *coefficienti di contemporaneità*. Risolvendo le (15) rispetto a τ_{rs}, si hanno notoriamente le equazioni:

$$(16) \qquad \tau_{rs}(P) = -\sum_1^3{}_{lm}\, c'_{rs,lm}\, \gamma_{lm}(P) - \int_S \sum_1^3{}_{lm}\, \Psi_{rs,lm}(P, Q)\, \gamma_{lm}(Q)\, dS_Q ,$$

che definiscono lo stato di tensione in P mediante le deformazioni subìte da tutte le particelle del corpo S.

Sostituendo nelle (2) e (3), per τ_{rs}, le espressioni (16), e per le γ_{lm} le (1), si ottengono delle equazioni integro-differenziali nelle u, v, w.

Mi limiterò a scrivere le equazioni indefinite, nel caso della omogeneità ed isotropia del mezzo elastico:

$$(17) \qquad \begin{cases} (A-B)\dfrac{\partial \Theta(P)}{\partial x} + B \underset{2}{\Delta} u(P) + \\ \quad + \displaystyle\int_S \left\{ [\Phi(P, Q) - \Psi(P, Q)] \frac{\partial \Theta(Q)}{\partial x} + \Psi(P, Q) \underset{2}{\Delta} u(Q) \right\} dS_Q = \varrho X , \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

4. *Le più generali equazioni della elasticità lineare.* — Tenendo conto delle due ipotesi — delle azioni ereditarie [n. 2] e delle azioni contemporanee [n. 3] — si ottengono le più generali equazioni della elasticità.

Ci limiteremo ad assegnare la forma delle equazioni indefinite per un corpo omogeneo ed isotropo nell'ipotesi lineare.

In tal caso, le (10) e le (15) sono manifestamente contenute nelle formule più generali:

$$(18) \qquad \gamma_{rs}(P, t) = -\sum_1^3{}_{lm}\, c_{rs,lm}\, \tau_{lm}(P, t) -$$

$$- \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_S \sum_1^3{}_{lm}\, \Phi_{rs,lm}(P, Q, t, t_1)\, \tau_{lm}(Q, t_1)\, dS_Q ,$$

dove nei coefficienti $\Phi_{rs,lm}(P, Q, t, t_1)$ sono riassunte le due influenze, ereditaria e contemporanea.

Dopo ciò, le più generali equazioni dell'equilibrio di un mezzo elastico omogeneo, isotropo, nell'ipotesi lineare, sono:

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(A-B)\frac{\partial\Theta(P\,,t)}{\partial x}+B\underset{2}{\Delta}u(P\,,t)+\\
&\qquad+\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{S}\Big\{\left[\Phi(P\,,Q\,,t\,,t_1)-\Psi(P\,,Q\,,t\,,t_1)\right]\frac{\partial\Theta(P\,,t_1)}{\partial x}+\\
&\qquad\qquad+\Psi(P\,,Q\,,t\,,t_1)\underset{2}{\Delta}u(Q\,,t_1)\Big\}\cdot dS_Q=\varrho X\,.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Mi propongo in Note successive di trattare alcuni casi particolari, quali illustrazioni istruttive delle generalità ora sviluppate.

Geografia-fisica. — *Terza Relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale* (lavori compiuti dal 7 aprile al 30 agosto 1914), trasmessa al PRESIDENTE dal capo della spedizione dott. FILIPPO DE FILIPPI.

Il Presidente BLASERNA dà comunicazione della seguente lettera, con la quale il dott. DE FILIPPI accompagna la Relazione qui sotto riportata:

Sugel Karaul (Turkestan Cinese), 29 agosto 1914.

Illustre Professore,

Le mando per il solito tramite la terza Relazione dei lavori compiuti dalla mia Spedizione, perchè Ella la comunichi alla Reale Accademia dei Lincei.

Il cataclisma europeo ha avuto la sua ripercussione fino in questi lontani paesi, e ci priva dell'opera e della compagnia di carissimi compagni. Per fortuna è venuto in un punto quando non ci poteva far gran danno, e finiremo ugualmente l'impresa svolgendo tutto intero il nostro programma di lavoro. Spero che i risultati già conseguiti giustifichino il largo e generoso aiuto che l'impresa ha ricevuto da ogni parte.

Mi abbia sempre coi migliori saluti per Suo

affezionatissimo
FILIPPO DE FILIPPI.

Il 7 aprile, avendo terminate le osservazioni geofisiche a Leh, il comandante Alessio, il prof. Abetti, il marchese Ginori e la guida Petigax partirono coll'intiero equipaggiamento scientifico per andare a far stazione a Moré, sull'altipiano Rupshu, a circa 4700 metri di altezza. Ho detto già che questa stazione, fuori del nostro itinerario, e non compresa nel progetto di lavori della spedizione, era stata decisa per desiderio dell'Ufficio Trigonometrico dell'India, al quale interessava di veder rifatta la determinazione gravime-