ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del **1914**.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Meccanica. — *Sopra le formole di rappresentazione degli integrali della dinamica.* Nota II di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

5. Consideriamo ora gli spostamenti caratteristici (¹):

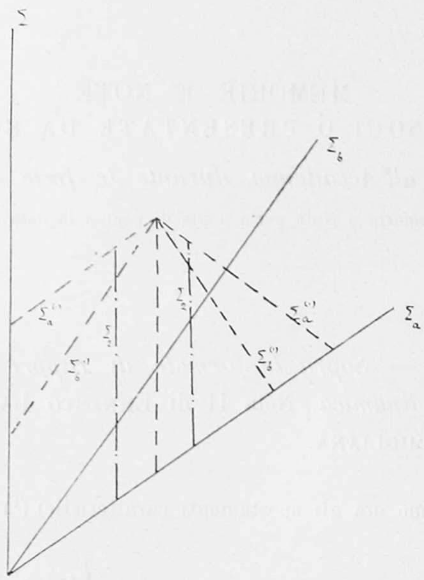
$$
(6^{bis})\quad \begin{cases} 4\pi\delta(u'_1\,, v'_1\,, w'_1) = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\,, \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,, \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\right) \dfrac{\left(t-\tau+\dfrac{r}{a}\right)^3}{3!\,r} \\[2ex] 4\pi\delta(u'_2\,, v'_2\,, w'_2) = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\,, \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,, \dfrac{\partial^3}{\partial x\,\partial z}\right) \dfrac{\left(t-\tau+\dfrac{r}{b}\right)^3}{3!\,r} \times \\[2ex] \qquad\qquad \times \dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{t-\tau+\dfrac{r}{b}}{r}\,, 0\,, 0\right). \end{cases}
$$

Lo spostamento $(u'_1 + u'_2\,,\ v'_1 + u'_2\,,\ w'_1 + w'_2)$ è quello dovuto ad un centro di forza agente nel punto $r = 0$. Le $(u'_1\,, v'_1\,, w'_1)$ definiscono una vibrazione longitudinale e si annullano sopra $\Sigma_a^{(1)}$; le $(u'_2\,, v'_2\,, w'_2)$ definiscono invece una vibrazione trasversale e si annullano sopra $\Sigma_b^{(1)}$. Se indichiamo infine con $(U_1\,, V_1\,, \ldots)$ $(U_2\,, \ldots)$ $U'_1\,, \ldots)$ $(U'_2\,, \ldots)$ ciò che divengono le U,V,W

(¹) Cfr. la mia Memoria già citata nell'introduzione cap. V.

del num. 3 quando le u, v, w sono sostituite con le (u_1, v_1, w_1) $(u_2, \ldots)$ $(u'_1, \ldots)$ $(u'_2, \ldots)$, per quanto precede avremo:

$$
(7) \quad \begin{cases}
u_1 = v_1 = w_1 = \mathrm{U}_1 = \mathrm{V}_1 = \mathrm{W}_1 = 0 & \text{sopra } \Sigma_a \\
u_2 = v_2 = w_2 = \mathrm{U}_2 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{W}_2 = 0 & \text{"} \quad \Sigma_b \\
u'_1 = v'_1 = w'_1 = \mathrm{U}'_1 = \mathrm{V}'_1 = \mathrm{W}'_1 = 0 & \text{"} \quad \Sigma_a^{(1)} \\
u'_2 = v'_2 = w'_2 = \mathrm{U}'_2 = \mathrm{V}'_2 = \mathrm{W}'_2 = 0 & \text{"} \quad \Sigma_b^{(1)}
\end{cases}
$$



Applichiamo ora la (6) agli spostamenti (u, v, w) (u'_1, v'_1, w'_1), e allo spazio compreso tra $\Sigma, \Sigma_a^{(1)}, \Sigma_b, \Sigma_2$. Otterremo

$$
(8) \qquad \int_{\Sigma + \Sigma_b + \Sigma_2'} (u \mathrm{U}'_1 + \cdots - u'_1 \mathrm{U} - \cdots)\, d\Sigma = 0 ,
$$

la integrazione estesa a $\Sigma_a^{(1)}$ essendo nulla per le (7), e con Σ'_2 intendendo la porzione di Σ_2 compresa tra Σ_b e $\Sigma_a^{(1)}$.

Applichiamo pure la (6) allo spazio compreso tra $\Sigma_a^{(1)}, \Sigma_a, \Sigma_2, \Sigma_b$, e alle terne di funzioni (u_1, v_1, w_1) (u'_1, v'_1, w'_1). Avremo:

$$
(9) \qquad \int_{\Sigma_b + \Sigma_2''} (u_1 \mathrm{U}'_1 + \cdots - u'_1 \mathrm{U}_1 - \cdots)\, d\Sigma = 0 ,
$$

poichè gli integrali estesi a $\Sigma_a^{(1)}$ e a Σ_a sono nulli per le (7). La Σ''_2 è poi la porzione di Σ_2 compresa tra Σ_a e Σ_b.

La (8) si può scrivere, notando che sopra Σ_b si ha $u = u_1, \dots \mathrm{U} = \mathrm{U}_1, \dots$:

$$\int_{\Sigma + \Sigma_2'} (u\,\mathrm{U}_1' + \cdots - u_1'\,\mathrm{U} - \cdots)\, d\Sigma + \int_{\Sigma_b} (u_1\,\mathrm{U}_1' + \cdots - u_1'\,\mathrm{U}_1 - \cdots)\, d\Sigma = 0\,.$$

Da questa e dalla (9), osservando che i due integrali estesi a Σ_b sono eguali e di segno contrario, perchè le normali a Σ_b in essi usate hanno versi contrarî, si deduce:

$$(10)\quad \int_{\Sigma} (u\,\mathrm{U}_1' + \cdots - u_1'\,\mathrm{U} - \cdots)\, d\Sigma + \int_{\Sigma_2'} (u\,\mathrm{U}_1' + \cdots - u_1'\,\mathrm{U} - \cdots)\, d\Sigma + \\ + \int_{\Sigma_2''} (u_1\,\mathrm{U}_1' + \cdots - u_1'\,\mathrm{U}_1 - \cdots)\, d\Sigma = 0\,.$$

In modo analogo applichiamo la (6) allo spazio compreso tra $\Sigma_b^{(1)}, \Sigma, \Sigma_b, \Sigma_2$ e agli spostamenti (u, v, w) (u_2', v_2', w_2'); otterremo, tenendo presenti le (7),

$$\int_{\Sigma + \Sigma_b + \Sigma_2'''} [u\,\mathrm{U}_2' + \cdots - u_2'\,\mathrm{U} - \cdots]\, d\Sigma = 0\,,$$

dove Σ_2''' è la porzione di Σ_2 compresa tra Σ_b e $\Sigma_b^{(1)}$. Notando, poi, che sopra Σ_b si ha $u = u_1 \dots \mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \dots$, l'ultima equazione si può scrivere:

$$(11)\quad \int_{\Sigma + \Sigma_2'''} (u\,\mathrm{U}_2' + \cdots - u_2'\,\mathrm{U} - \cdots)\, d\Sigma + \\ + \int_{\Sigma_b} (u_1\,\mathrm{U}_2' + \cdots - u_2'\,\mathrm{U}_1 - \cdots)\, d\Sigma = 0\,.$$

Applicando infine la (6) alle funzioni (u_1, v_1, w_1) (u_2', v_2', w_2') e allo spazio racchiuso da $\Sigma_b, \Sigma_b^{(1)}, \Sigma_a, \Sigma_2''$, e tenendo conto delle (7), si ha:

$$\int_{\Sigma_b + \Sigma_2''} (u_1\,\mathrm{U}_2' + \cdots - u_2'\,\mathrm{U}_1 - \cdots)\, d\Sigma = 0\,.$$

Da questa e dalla precedente discende allora:

$$(12)\quad \int_{\Sigma} (u\,\mathrm{U}_2' + \cdots - u_2'\,\mathrm{U} - \cdots)\, d\Sigma + \int_{\Sigma_2'''} (u\,\mathrm{U}_2' + \cdots - u_2'\,\mathrm{U} - \cdots)\, d\Sigma + \\ + \int_{\Sigma_2''} (u_1\,\mathrm{U}_2' + \cdots - u_2'\,\mathrm{U}_1 - \cdots)\, d\Sigma = 0\,.$$

Dalla (10) e (12) discende infine:

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Sigma}(u\,U_1' + \cdots - u_1'\,U - \cdots)\,d\Sigma - \int_{\Sigma}(u\,U_2' + \cdots - u_2'\,U - \cdots)\,d\Sigma + \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Sigma_2'} \{ u(U_1' - U_2') + \cdots - (u_1' - u_2')\,U - \cdots \}\,d\Sigma + \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Sigma_2''} \{ u_1(U_1' - U_2') + \cdots - (u_1' - u_2')\,U_1 - \cdots \}\,d\Sigma + \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Sigma_2' - \Sigma_2'''}(u\,U_1' + \cdots - u_1'\,U - \cdots)\,d\Sigma = 0\,. \end{cases}$$

Sopra Σ si ha:

$$\frac{\partial t}{\partial n} = 0 \quad ; \quad n \equiv \nu \quad ; \quad U = -\frac{1}{\delta}\,X_n \quad ; \quad d\Sigma = d\sigma\,dt\,,$$

e sopra Σ_2:

$$\frac{\partial t}{\partial n} = 0 \quad ; \quad n \equiv \varrho \quad ; \quad U = -\frac{1}{\delta}\,X_\rho \quad ; \quad d\Sigma = d\omega\,dt\,,$$

essendo $d\omega$ l'elemento superficiale della sfera di raggio ϱ. Prendiamo i limiti dei due membri per ϱ tendente a zero. Si ha [1]:

$$\lim_{\rho=0}\int_{\Sigma_2'} \{ u(U_1' - U_2') + \cdots - (u_1' - u_2')\,U - \cdots \}\,d\Sigma =$$

$$= \lim \int_{\frac{r_0}{b}}^{t} dt \int_{\omega} \Big[u(x\,,y\,,z\,;t)\,\frac{1}{\delta}\,(X_\rho^{(2)\prime} - X_\rho^{(1)\prime}) + \cdots -$$

$$- [u_1'(x\,,y\,,z\,;t) - u_2'(x\,,y\,,z\,;t)]\,\frac{X_\rho}{\delta} - \cdots \Big]\,d\omega =$$

$$= -\frac{1}{\delta}\int_{\frac{r_0}{b}}^{t} u(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;t)\,(t-\tau)\,dt\,,$$

$$\lim_{\rho=0}\int_{\Sigma_2''} \{ u_1(U_1' - U_2') + \cdots - (u_1' - u_2')\,U_1 - \cdots \}\,d\Sigma =$$

$$= -\frac{1}{\delta}\int_{\frac{r_0}{a}}^{\frac{r_0}{b}} u_1(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;t)\,(t-\tau)\,dt\,,$$

$$\lim_{\rho=0}\int_{\Sigma_2' - \Sigma_2'''}(u\,U_1' + \cdots - u_1'\,U - \cdots)\,d\Sigma = 0\,,$$

[1] Cfr. la mia Memoria già citata, cap. V, n. 9.

dove r_0 è la distanza del punto (ξ, η, ζ) alla superficie σ. Sicchè la (13) diviene:

$$(14)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{r_0}{b}}^{\tau} u(\xi, \eta, \zeta; t)(t-\tau)\, dt + \int_{\frac{r_0}{a}}^{\frac{r_0}{b}} u_1(\xi, \eta, \zeta; t)(t-\tau)\, dt = \\ \displaystyle\qquad = \int_\sigma d\sigma \int_0^{\tau - \frac{r}{b}} (u\, X_n^{(2)\prime} + \cdots - u_2' X_n - \cdots)\, dt - \\ \displaystyle\qquad - \int_\sigma d\sigma \int_0^{\tau - \frac{r}{a}} (u\, X_n^{(1)\prime} + \cdots - u_1' X_n - \cdots)\, dt\,. \end{cases}$$

Da questa, con due derivazioni rispetto a τ, si otterrà la $u(\xi, \eta, \zeta; \tau)$ per mezzo delle (u, v, w) superficiali e delle (X_n, Y_n, Z_n) date sopra σ per i valori di $t > 0$. I valori delle (u, v, w) sopra σ e per $t = 0$ sono inoltre, per ipotesi, nulle.

Usando di altre due sestuple di spostamenti analoghe alle (6^{bis}), si avranno la $v(\xi, \eta, \zeta; t)$ e la $w(\xi, \eta, \zeta; \tau)$. Non eseguirò i calcoli i quali avrebbero poco interesse, le formole di rappresentazione, nella forma data dal Somigliana ([1]), presentando il carattere massimo di semplicità.

Noterò, inoltre, che dalla formola (14), e non da quella ottenuta per derivazione, si può ricavare un metodo di integrazione per il problema *esterno* della dinamica elastica. Occorrerà perciò introdurre, come prossimamente mostrerò, delle funzioni analoghe a quelle di Green.

Nella (14) i limiti superiori degli integrali del 2° membro:

$$\tau - \frac{r}{b}\,, \quad \tau - \frac{r}{a}\,,$$

sono positivi o nulli, per il modo stesso con cui questa formola è ricavata. Se perciò il punto (ξ, η, ζ, τ) è nello spazio compreso tra Σ_b e Σ_a, il primo integrale è nullo, e la vibrazione è puramente longitudinale. I potenziali ritardati, che servono alla rappresentazione degli integrali, sono dunque vincolati a questa limitazione.

([1]) Cfr. C. Somigliana, *Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*, Atti R. Accad. delle scienze di Torino, vol. XL-XLII, tre Note. In questi lavori si trova pure la bibliografia relativa all'argomento di questa Nota.