ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *La dinamica di relatività dei mezzi continui dedotta dalla dinamica classica colla modificazione di un solo principio.* Nota di G. D. Mattioli, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Le equazioni fondamentali della dinamica relativistica valevoli per qualsiasi tipo di mezzo continuo, furono già ricavate da Laue nel suo notevole trattato (1). Senonchè il metodo ch'egli scelse non è il più adatto per far riconoscere, senza alcuno sforzo, ciò che di veramente nuovo le idee relativistiche introducono nei concetti della meccanica, a chi la natura e la correlazione dei fatti meccanici è abituato a concepire secondo lo schema ordinario.

Laue procede esclusivamente per analogie elettromagnetiche, nell'intenzione — che egli esplicitamente manifesta nell'ultimo capitolo del suo libro — di collegare l'elettromagnetismo con la dinamica, mettendo a base d'entrambe le teorie gli stessi principî fondamentali.

Non è nostra intenzione di polemizzare sulla sostenibilità di tale criterio; solamente notiamo come la mancanza di un perfetto parallelismo tra campo elettromagnetico e mezzo dinamico (la qual cosa appare all'esame più superficiale) conduca il Laue a scindere il caso, in cui non si presentano forze di massa, dall'altro in cui queste hanno un valore non nullo, e a trattare i due casi con procedimenti del tutto diversi. Ciò riesce assai strano, tanto più se ci si mette dal punto di vista della meccanica classica.

In generale, tutta l'esposizione del Laue risulta confusa e frammentaria, in causa sempre dello sforzo, evidente ad ogni passo, d'inquadrare la dinamica sull'innaturale modello elettromagnetico.

Sembra quindi essere opportuno di riconoscere — con una intrinseca trattazione della questione — come si possa giungere a formulare la dinamica di relatività in forma persuasiva e prossima alla impostazione classica.

Questo procedimento non trova conseziente il Laue stesso. Egli infatti scrive, al § 26, che si contraddice il principio di ridurre le ipotesi al minimo numero, se si assume la meccanica newtoniana quale una approssimazione valevole per piccole velocità. E ciò perchè la quantità di moto, quale la si definisce nel caso classico ponendo $\mathbf{g} = \mu \mathbf{v}$, non è il limite verso cui tende, all'annullarsi della velocità, l'analoga espressione relativistica. Talchè, per arrivare dalla nuova alla forma ordinaria della dinamica, oltre che passare al limite per $\mathbf{v} = 0$, bisognerebbe fare in più l'anzidetta ipotesi rispetto alla quantità di moto.

(1) Laue, *Das Relativitätsprinzip* [Braunschweig, Wieweg, 1913].

Il vizio di questo ragionamento risiede nel fatto che Laue, esigendo la simmetria di un certo tensore, implicitamente definisce la quantità di moto in un modo diverso dall'ordinario, anche nel caso di piccole velocità.

La sua obbiezione non ha valore, perchè il numero e il tipo delle ipotesi sono invece gli stessi nei due casi, come mi propongo di far vedere in questa Nota, mostrando che è possibile di costruire la dinamica di relatività movendo dalla sua forma classica — che è valida almeno in prima approssimazione, secondo quanto ci assicura l'esperienza — e senza fare alcun ricorso all'elettromagnetismo.

1. Prendo le mosse da una mia recente Nota (¹), dove, in vista della applicazione attuale, le equazioni dinamiche (classiche) dei mezzi continui ho trasformato in una forma che si presenta opportuna per dedurne quelle della meccanica detta di relatività.

Richiamo brevemente i risultati ivi ottenuti, conservando le stesse notazioni.

Le equazioni dinamiche, nella forma che ad esse feci assumere, sono le seguenti:

$$(1_a)\qquad \mathbf{g}=\mu\mathbf{v}\,,$$

$$(1_b)\qquad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}+\frac{\partial \Psi_x}{\partial x}+\frac{\partial \Psi_y}{\partial y}+\frac{\partial \Psi_z}{\partial z}=\mathbf{F}\,,$$

$$(1_c)\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\operatorname{div} X=\mathbf{v}\times\mathbf{F}\,.$$

Le Ψ dipendono dagli sforzi, quantità di moto e velocità, avendosi

$$(2)\qquad \Psi_x=v_x\mathbf{g}+\Phi_x\,,\quad \Psi_y=v_y\mathbf{g}+\Phi_y\,,\quad \Psi_z=v_z\mathbf{g}+\Phi_z\,,$$

mentre per le loro componenti valgono le relazioni di simmetria

$$(3)\qquad \Psi_{zy}=\Psi_{yz}\quad,\quad \Psi_{xz}=\Psi_{zx}\quad,\quad \Psi_{yx}=\Psi_{xy}\,.$$

Dal confronto delle (2) con le (3), scendono, per le componenti degli sforzi, condizioni che possono anche scriversi

$$(4)\qquad \left|\begin{aligned} &\Phi_{zy}-\Phi_{yz}=(\mathbf{v}\wedge\mathbf{g})_x\,,\\ &\Phi_{xz}-\Phi_{zx}=(\mathbf{v}\wedge\mathbf{g})_y\,,\\ &\Phi_{yx}-\Phi_{xy}=(\mathbf{v}\wedge\mathbf{g})_z\,.\end{aligned}\right.$$

I secondi membri, nel caso ordinario, sono nulli, considerato il parallelismo della velocità colla quantità di moto.

(¹) Questi Rendiconti, questo volume, pag. 328.

Lo sclare ε, che appare nella (1_c), è, secondo quanto risulta dai nn. 3, 4, 5 della citata Nota, la somma dell'energia cinetica con quella indicata con ε_1, che è definito dall'equazione

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \operatorname{div} \varepsilon_1 \mathbf{v} = -\left[\Phi_x \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \Phi_y \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \Phi_z \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right],$$

e che in ogni caso s'interpreta come la densità dell'energia, diversa dalla cinetica, di tipo dipendente dalla natura del mezzo, che interviene ad assicurare l'equilibrio energetico. Ora si vede subito che l'energia ε_1 è determinata a meno di una arbitraria distribuzione iniziale: possiamo quindi considerare la ε addirittura uguale alla densità dell'energia totale della materia, comprendendovi cioè l'energia atomica e le altre eventuali ignote forme di energia.

Rappresentando inoltre X il flusso di energia espresso dalla relazione

$$X = \varepsilon \mathbf{v} + \Theta, \tag{5}$$

nella quale è

$$\Theta = (\mathbf{v} \times \Phi_x)\,\mathbf{i} + (\mathbf{v} \times \Phi_y)\,\mathbf{j} + (\mathbf{v} \times \Phi_z)\,\mathbf{k}$$

($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vettori unitarî fondamentali), si constata essere la (1_c) la traduzione del principio di conservazione dell'energia.

2. Ciò posto, vediamo come si passa dallo schema classico della dinamica — ora accennato — a quello relativistico.

A questo si perviene in modo semplicissimo, conservando senz'altro tutte le equazioni del numero precedente — con lo stesso significato meccanico delle lettere — eccettuata l'equazione (1_a) che definisce la quantità di moto.

Nella definizione di quantità di moto si palesa l'ipotesi fondamentale della teoria di relatività, per la quale la quantità di moto stessa (e quindi l'inerzia) più non si fa risalire ad un invariante del moto (la massa della ordinaria teoria), ma si riconduce all'energia facendo la posizione

$$\mathbf{g} = \frac{X}{c^2} = \frac{\varepsilon \mathbf{v} + \Theta}{c^2}, \tag{$1'_a$}$$

con c velocità della luce.

Sostituendo, nelle equazioni classiche, solamente alla (1_a) la $(1'_a)$, si ottiene quindi il fondamentale sistema delle equazioni dei mezzi continui della dinamica di relatività, senza invocare, sull'esempio di Laue, formali analogie elettromagnetiche.

Siccome si deve conservare alla meccanica newtoniana valore di approssimazione nel caso di piccole velocità, si realizza un intimo legame tra le due dinamiche, esigendo, con Einstein e Minkowski, che, nel caso di corpi non soggetti a sforzi, per $\mathbf{v}$ prossimo a zero la nuova meccanica si trasformi nella classica. Ciò val quanto dire che per $\mathbf{v} = 0$, supposti nulli gli sforzi e quindi $\Theta = 0$, la $(1'_a)$ deve coincidere colla (1_a): si avrà, così,

$$\frac{\varepsilon_0}{c^2} = \mu ,$$

rappresentando con ε_0 il valore di ε per $\mathbf{v} = 0$.

Tale relazione fornisce in misura assoluta l'energia di riposo della materia, ed ha una fondamentale importanza in alcune moderne speculazioni sui campi gravitazionali.

Nel caso in cui gli sforzi non sono nulli, le due dinamiche più non coincidono per piccole velocità, non ostante la precedente relazione tra massa ed energia, come mostra il confronto della (1_a) e $(1'_a)$; si vede subito, però, che le differenze quantitative sono piccolissime, a causa del fattore $\frac{1}{c^2}$.

Un altro legame può istituirsi colla dinamica classica, mostrando che questa può concepirsi come un caso limite della relativistica.

Infatti, l'equazione (1_c) può scriversi, per la $(1'_a)$, sotto la forma

$$(1'_c) \qquad \frac{\partial \frac{\varepsilon}{c^2}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{g} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) = 0 .$$

Si confronti quest'ultima colla equazione di continuità

$$(7) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{g} = 0 ,$$

che nella meccanica classica può sostituirsi alla (1_c). Per c crescente indefinitamente, la $(1'_c)$ diviene la (7), purchè si ponga $\lim\limits_{c=\infty} \frac{\varepsilon}{c^2} = \mu$; colla stessa posizione $\mathbf{g}$ assume la forma ordinaria $\mu\mathbf{v}$, mentre le altre equazioni rimangono invariate. La dinamica classica non si presenta se non come il limite della relativistica per $c = \infty$.

Considerato che il valore di c è molto grande, apparisce, anche da questo lato, che le differenze quantitative sono così piccole da sfuggire alla comune esperienza; finchè, però, la velocità è piccola dinnanzi a c. Solo per velocità dell'ordine di grandezza di c, l'ipotesi relativistica conduce a notevoli divergenze da quello che fornisce la teoria ordinaria; ma tali velocità non sono raggiungibili neppure nel campo astronomico: per cui non si può trovare alle nuove idee alcuna obbiezione sperimentale.

3. L'ipotesi relativistica $(1'_a)$ — pur non influenzando quantitativamente in modo apprezzabile nei casi pratici, come si è visto — conduce a modificare alcuni fondamentali concetti della dinamica classica.

È in primo luogo manifesto il valore dell'energia agli effetti dell'inerzia: non più al flusso della massa (invariante colla velocità), ma bensì a quello dell'energia compete inerzia. E non solo al flusso materiale d'energia $\varepsilon\mathbf{v}$, ma anche al flusso Θ dell'energia (lavoro) semplicemente trasmessa attraverso la materia [Θ, espresso dalla (6), rappresenta, evidentemente nelle sue componenti il lavoro fatto dagli sforzi e trasmesso nelle direzioni degli assi].

È però chiaro che, a causa dell'ordine di grandezza del fattore $\frac{1}{c^2}$, l'inerzia proveniente dalle ordinarie specie d'energia (cinetica, elastica, calorifica, elettrica ecc.) è piccolissima.

Dalla $(1'_a)$ scende che velocità e quantità di moto più non sono, in generale, parallele: allora i secondi membri delle (4) sono diversi da zero. Gli sforzi non conservano quindi nella nuova meccanica la simmetria che li caratterizza nel caso classico.

Quali conseguenze dei fondamentali concetti della meccanica di relatività (inerzia dell'energia e disimmetria degli sforzi), applicando le equazioni dinamiche a casi particolari, possono ricavarsi risultati che non trovano posto nella meccanica ordinaria. Così si troverebbe che per mantenere in moto uniforme un corpo a cui si apporti una certa quantità d'energia — ad esempio, calore — bisognerebbe agire con una forza opportuna; come pure che un corpo in istato di tensione elastica abbisogna di una coppia per conservare la propria velocità uniforme.

Ma per tutto questo si veda la citata opera del Laue; qui ci basta d'aver accennato i più espressivi punti della nuova teoria.

4. È noto che le equazioni dinamiche classiche sono invarianti rispetto alle traslazioni uniformi degli assi, rimanendo invariato il tempo. Dobbiamo riconoscere, ora, quale altro gruppo di trasformazioni goda della stessa proprietà nel caso che valga l'ipotesi $(1'_a)$.

Supponiamo, a tale scopo, esplicitate secondo gli assi x, y, z, quelle, tra le equazioni fondamentali $(1'_a)$, (1_b), $(1'_c)$, (3), che hanno forma vettoriale.

Scriveremo, da ora innanzi, x_1, x_2, x_3, x_4, rispettivamente in luogo di x, y, z, ict con $i = \sqrt{-1}$; convenendo inoltre di rappresentare coi numeri 1, 2, 3 le x, y, z affisse ad altre lettere.

Poniamo

$$a)\qquad T_{rs} = \Psi_{rs}\,, \qquad (r = 1, 2, 3)$$

$$b)\qquad T_{4r} = T_{r4} = icg_r\,, \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

$$c)\qquad T_{44} = -\varepsilon\,,$$

$$d)\qquad F_4 = \frac{i}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{F})\,,$$

Le (1_b) e $(1'_c)$ si scrivono allora, comprensivamente,

$$\text{(I)}\qquad \sum_1^4{}_s \frac{\partial T_{rs}}{\partial x_s} - F_r = 0, \qquad (r = 1, 2, 3, 4)$$

mentre le (3) divengono, ricordando anche le posizioni b),

$$\text{(II)} \qquad T_{rs} - T_{rs} = 0 . \qquad (r, s = 1, 2, 3, 4)$$

La ($1'_a$) si scrive, tenendo presenti le (6) e (2),

$$T_{4r} + \frac{iv_r}{c^2} T_{44} - \frac{i}{c} \sum_1^3{}_s T_{sr} v_s + \frac{v_r}{c} \sum_1^3{}_s \frac{v_s}{c} T_{4s} = 0 , \qquad (r = 1, 2, 3)$$

oppure, sostituendo alle v_r i loro valori $\dfrac{dx_r}{dt} = ic \dfrac{dx_r}{dx_4}$,

$$T_{4r} - \frac{dx_r}{\partial x_4} T_{44} + \sum_1^3{}_s T_{sr} \frac{dx_s}{\partial x_4} - \frac{dx_r}{dx_4} \sum_1^3 \frac{dx_s}{dx_4} T_{4s} = 0 ,$$

ossia

$$\sum_1^4{}_s T_{sr} \frac{dx_s}{dx_4} - \frac{dx_r}{dx_4} \sum_1^4{}_s T_{4s} \frac{dx_s}{dx_4} = 0 . \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Introdotte per brevità le forme differenziali

$$\tau_r = \sum_1^4{}_s T_{rs}\, dx_s ,$$

si è senz'altro condotti al sistema simmetrico

$$\text{(III)} \qquad \frac{dx_1}{\tau_1} = \frac{dx_2}{\tau_2} = \frac{dx_3}{\tau_3} = \frac{dx_4}{\tau_4} .$$

Le (I), (II), (III) sono, nelle nuove notazioni, le equazioni fondamentali della dinamica di relatività.

5. Data la forma simmetrica delle (I), (II), (III), si riconosce subito il loro carattere invariantivo rispetto ai movimenti dell' S_4 euclideo (x_1, x_2, x_3, x_4), purchè le F_r e T_{rs} si comportino come sistemi covarianti, semplice e doppio rispettivamente. (Si constaterebbe, anzi, che tale gruppo di movimenti, a meno di una inessenziale trasformazione moltiplicativa, è il più ampio gruppo che conserva le equazioni dinamiche quando si supponga che le F_r e T_{rs} si trasformino indipendentemente, come è nella natura delle cose).

Ripassando al campo, reale il sistema (I), (II), (III), è invariante rispetto al gruppo del Lorentz, che deve necessariamente assumersi, nel caso che valga l'ipotesi ($1'_a$), a fondamento della cinematica delle traslazioni relative uniformi. Il nuovo concetto di tempo dell'elettromagnetismo si trova così a dover essere trasportato nella meccanica.

Le trasformazioni delle grandezze reali che corrispondono alle F_r e T_{rs}, si deducono facilmente dalla covarianza di queste ultime, e coincidono, del resto, con quelle date dal Laue.