

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 novembre 1914.

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sul regime variabile del calore raggianti: Dimostrazioni* (¹). Nota del Socio T. LEVI-CIVITA.

6. — IMPOSTAZIONE DEL CALCOLO DELLA ENERGIA TOTALE U.

Specificando, diciamo: Energia totale, la quale si trova ad un dato istante t entro un generico campo S del mezzo, ben si intende allo stato di energia raggianti, cioè viaggiante in tutte le possibili direzioni con velocità c .

Il calcolo si imposta come segue:

Tutta l'energia in questione

o è penetrata in S passando attraverso un qualche elemento $d\sigma$ del contorno;

ovvero è stata emessa da un qualche elemento dS del campo.

Nell'uno e nell'altro caso essa uscirà poi dal campo attraverso un qualche elemento $d\sigma'$. La si prenderà in considerazione tutta quanta, senza duplicati, associando in tutti i modi possibili gli elementi di partenza ($d\sigma$ ovvero dS) coi $d\sigma'$ di uscita, coll'avvertenza che il frapposto cammino sia tutto interno al campo. Se il contorno σ di S è convesso, quest'ultima

(¹) Cfr. la Nota *Sul regime ecc.: Premessa e risultati*, inserita nel precedente fascicolo di questi Rendiconti, pp. 371-379.

condizione si trova automaticamente soddisfatta; in generale vi si ottempera, limitandosi a considerare, sopra ogni raggio spiccato da un elemento di partenza, il punto in cui, *per la prima volta*, esso esce dal campo.

Esaminiamo separatamente i due contributi: V dei vari $d\sigma$, e W dei vari dS .

7. — ESPRESSIONE DELL'ADDENDO V.

Fissiamo una coppia $d\sigma, d\sigma'$, e occupiamoci dell'energia che, avendo attraversato $d\sigma$, si trova in viaggio, all'istante t , fra $d\sigma$ e $d\sigma'$. Si tratta, in tal caso, di energia inviata da $d\sigma$ entro il cono elementare che proietta $d\sigma'$ da $d\sigma$ (ossia, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, da un punto qualunque di $d\sigma$).

Dicansi: P e P' due punti rispettivamente appartenenti a $d\sigma, d\sigma'$; x, y, z e x', y', z' le loro coordinate; r la loro distanza; n, n' le normali al contorno in P, P'; Q un punto generico del segmento PP'; s la distanza \overline{PQ} ; \widehat{nr} l'angolo, in P, di n col raggio vettore che va da P a P'; $\widehat{n'r}$ l'angolo, in P', di n' col raggio vettore che va da P' a P, *necessariamente acuti*, dacchè si suppone che $d\sigma$ sia un elemento di partenza e $d\sigma'$ un elemento di uscita; $d\Omega$ l'ampiezza del cono elementare che proietta $d\sigma'$ da P, ossia

$$d\Omega = \frac{d\sigma' \cos \widehat{n'r}}{r^2}.$$

Nella porzione di questo cono, la cui distanza dal vertice P è compresa fra s e $s + ds$, sarà contenuta, all'istante t , energia partita da σ con debita anticipazione, e precisamente, c essendo la velocità, fra gli istanti $t - \frac{s}{c}$ e $t - \frac{s + ds}{c}$, il che implica « durante il tempuscolo $\frac{ds}{c}$ ».

Attesa la definizione di G (§ 1), la detta energia ammonterà, *in partenza*, a

$$G d\sigma d\Omega \frac{ds}{c},$$

dove G si riferisce a $d\sigma$, alla direzione che va da P a P' e all'istante $t - \frac{s}{c}$. *In arrivo* (dopo essere stata sottoposta all'azione assorbente del mezzo per un tratto di lunghezza s), a una frazione f di quanto era in partenza, ossia a

$$f G d\sigma d\Omega \frac{ds}{c}.$$

La funzione f vale $e^{-\alpha s}$ nel caso tipico del regime stazionario a temperatura

costante. In generale (α potendo variare col posto e col tempo) l'espressione di f è più complicata. A noi basta tuttavia ritenere che si tratta di una funzione continua, positiva per sua natura e ≤ 1 , la quale si riduce all'unità per $s = 0$.

Sommando rispetto ai vari ds , cioè integrando l'espressione precedente rispetto ad s fra 0 ed r , si ha, in base alla (1),

$$\frac{1}{c} d\sigma d\Omega \cos \widehat{nr} \int_0^r H\left(t - \frac{s}{c}\right) f ds,$$

in H essendosi preso in evidenza l'istante, e sottointendendosi che si tratta del punto P e della direzione $P \rightarrow P'$ (vogliamo dire di un elemento superficiale, spiccato da P normalmente ad r , con referenza al passaggio d'energia verso P').

L'integrale

$$\int_0^r H\left(t - \frac{s}{c}\right) f ds,$$

considerato come funzione del suo limite superiore r , può, collo sviluppo di Taylor arrestato al secondo termine, essere posto sotto la forma

$$r(H + r\Phi),$$

dove H si riferisce all'istante t (nonchè, ben si intende, al punto P e alla direzione $P \rightarrow P'$), e Φ ha un limite superiore finito (tale ritenendosi quello di $\frac{\partial H}{\partial t}$ al variare comunque di P, P' e di t , nel campo e nell'intervallo di tempo che si considerano).

Il contributo elementare della coppia $d\sigma, d\sigma'$, sostituito per $d\Omega$ il suo valore $\frac{d\sigma' \cos \widehat{n'r}}{r^2}$, assume così l'espressione

$$(8) \quad \frac{1}{c} d\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{H + r\Phi\}.$$

La direzione $P \rightarrow P'$ ha per coseni direttori $\frac{x' - x}{r}, \frac{y' - y}{r}, \frac{z' - z}{r}$. Sarà quindi, in base alla (3),

$$H = K - k \sum \frac{\partial K}{\partial x} \frac{x' - x}{r},$$

il simbolo Σ indicando la somma del termine scritto cogli altri due che si ottengono da esso per sostituzione delle lettere x, x' , con y, y' e z, z' . Le funzioni $K, k, \frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y}, \frac{\partial K}{\partial z}$, che compariscono nel secondo membro, si

riferiscono, naturalmente, al punto P. Giova introdurre un punto M, scelto a piacimento entro S e fisso al variare di P. Si ha, identicamente,

$$(9) \quad H = \mathfrak{H} + \eta$$

con

$$(10) \quad \mathfrak{H} = K_M - \sum \frac{x' - x}{r} \left(k \frac{\partial K}{\partial x} \right)_M,$$

e

$$\eta = (K_P - K_M) - \sum \frac{x' - x}{r} \left\{ \left(k \frac{\partial K}{\partial x} \right)_P - \left(k \frac{\partial K}{\partial x} \right)_M \right\},$$

l'indice (M o P) essendo apposto ad una funzione dei punti di S per specificare il punto in cui va preso il valore della funzione.

Ritenuta la funzione K finita e continua, insieme con le sue derivate di spazio prime e seconde, e altresì la $k(K)$ insieme con la sua derivata prima rapporto all'argomento K, si può manifestamente, mercè applicazione dello sviluppo di Taylor arrestato dopo il primo termine, attribuire ad η la forma

$$\eta = \overline{PM} \cdot \varphi,$$

φ designando, come già Φ , una funzione che ha limite superiore finito, qualunque siano P, P' e t.

Ove si introduca la massima corda l del campo S, e si noti che i rapporti $\frac{\overline{PM}}{l}$, $\frac{r}{l}$ sono entrambi ≤ 1 , si può ancora porre

$$(11) \quad r\Phi + \eta = l \left(\frac{r}{l} \Phi + \frac{\overline{PM}}{l} \varphi \right) = l\Phi^*,$$

Φ^* comportandosi come Φ e φ quanto al limite superiore. Ed è importante rilevare la circostanza seguente: Per un dato S, sia $\frac{1}{2}A$ il maggiore dei limiti superiori di $|\Phi|$, $|\varphi|$, al variare di P, P' e t. Quando, in luogo di S, si considera una sua parte comunque piccola, $|\Phi|$ e $|\varphi|$ rimangono a fortiori $\leq \frac{1}{2}A$. Ne consegue, badando a

$$\Phi^* = \frac{r}{l} \Phi + \frac{\overline{PM}}{l} \varphi,$$

che il limite superiore di $|\Phi^*|$ è $\leq A$, e ciò comunque si faccia convergere S a zero attorno ad M.

Ritorniamo ormai al contributo elementare (8). Mercè le (9) e (11), potremo scriverlo

$$(8') \quad \frac{1}{c} d\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{ \mathfrak{H} + l\Phi^* \},$$

\mathfrak{H} essendo data dalla (10).

V è, per sua definizione, la somma di tutti questi contributi elementari. Supponiamo per un momento, tanto per fissare le idee, che σ sia una superficie convessa. In tal caso, ad ogni $d\sigma'$, considerato come elemento di uscita, vanno associati *tutti* i possibili $d\sigma$, come s'è osservato nel precedente §. L'espressione di V è, allora,

$$V = \int_{\sigma} d\sigma' \int_{\sigma} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{ \mathfrak{S} + l\Phi \}.$$

In generale, ad ogni $d\sigma'$ va associata soltanto una parte dei $d\sigma$: quelli, per cui il segmento PP' è tutto interno al campo. Chiamando σ^* quella porzione di σ (dipendente dalla posizione di P'), che è luogo dei punti in cui i raggi spiccati da P' incontrano *per la prima volta* il contorno, l'espressione di V, valida in ogni caso, sarà

$$(12) \quad V = \int_{\sigma} d\sigma' \int_{\sigma^*} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{ \mathfrak{S} + l\Phi \},$$

la quale differisce dalla precedente soltanto perchè l'integrazione interna è estesa a σ^* , anzichè a tutta σ (coincidendo, naturalmente, σ^* con σ , nel caso dei contorni convessi).

8. — LEMMI.

Prima di procedere, importa rilevare che vi sono due tipi molto semplici di integrali quadrupli, per cui è indifferente estendere l'integrazione interna a σ^* ovvero a tutto σ . Essi sono

$$J = \int_{\sigma} d\sigma' \int_{\sigma} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r}$$

e

$$J_x = \int_{\sigma} d\sigma' \int_{\sigma} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} (x' - x),$$

coi due analoghi J_y, J_z .

La dimostrazione si fa come al § 7 della già citata mia Nota *Deduzione rigorosa* ecc. (1).

Dalla stessa Nota (§ 4) si ha ancora

$$J = 4\pi S \quad (S \text{ volume del campo, designato colla stessa lettera}).$$

Infine si riconosce ovviamente che $J_x = 0$. Infatti, scambiamo fra loro $d\sigma$ e $d\sigma'$. Da un lato, ciò non influisce sul valore dell'integrale. D'altro lato,

(1) In questi Rendiconti, ser. 5^a, vol. XXIII (1° sem. 1914), pp. 12-21.

ove si inverte eziandio l'ordine delle integrazioni, tutto rimane inalterato nella espressione formale di J_x , tranne il binomio $x' - x$ che cambia segno. Ne risulta $J_x = -J_x$, e quindi $J_x = 0$. Nulli del pari sono, naturalmente, gli integrali J_y ed J_z .

9. — COMPORTAMENTO LIMITE DI V.

Tenuto presente tutto ciò, e posto

$$I = \int_{\sigma} d\sigma' \int_{\sigma^*} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \Phi^*,$$

ove, in base alla (10), si espliciti \mathfrak{S} , la precedente espressione di V diviene

$$(13) \quad V = 4\pi S \cdot K_M + lI.$$

Ricordiamo che, per ognuno dei contributi elementari costituenti V, $\cos \widehat{nr}$, $\cos \widehat{n'r}$ sono di necessità positivi; tali essi sono quindi anche in I. Dacchè $|\Phi^*|$ non supera una certa costante \mathcal{A} , dalla definizione di I scende la limitazione

$$|I| \leq \mathcal{A} \int_{\sigma} d\sigma' \int_{\sigma^*} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r}.$$

Nell'integrale del secondo membro è ormai lecito sostituire σ a σ^* .

L'integrale stesso non differisce pertanto da $J = 4\pi S$. Ne deduciamo

$$\left| \frac{I}{S} \right| \leq 4\pi \mathcal{A}.$$

Quando si fa rimpicciolire indefinitamente S attorno ad M, la massima corda l converge a zero, mentre, come abbiamo osservato, si può mantenere la stessa costante \mathcal{A} come limite superiore di $|\Phi^*|$. Perciò $l \frac{I}{S}$ converge a zero, e la (13), dividendo per S e passando al limite, porge

$$(13') \quad \lim_{S \rightarrow 0} \frac{V}{S} = 4\pi K_M.$$

10. — L'ADDENDO W.

Dobbiamo ora considerare i contributi dei vari coni elementari che, avendo per vertice un generico elemento dS del campo, proiettano un $d\sigma'$ del contorno, restando tutti interni al campo (condizione, quest'ultima, soddisfatta per qualsiasi coppia $dS, d\sigma'$, quando il contorno è convesso).

Specifichiamo (a meno di infinitesimi) con P la sede di dS , con P' quella di $d\sigma'$; e indichiamo, al solito, con r la distanza $\overline{PP'}$, con $d\Omega$ l'apertura del cono elementare, che proietta $d\sigma'$ da P.

Si tratta di esprimere l'energia che, essendo stata emessa da dS con conveniente anticipazione, si trova, all'istante t , viaggiante entro il cono suaccennato. Con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel § 7 a proposito di V, si ottiene

$$\frac{1}{c} dS d\Omega \int_0^r \varepsilon \left(t - \frac{s}{c} \right) f ds,$$

$\varepsilon \left(t - \frac{s}{c} \right)$ designando il coefficiente di emissione in P all'istante $t - \frac{s}{c}$, e f una frazione propria dipendente dall'assorbimento.

Applichiamo all'integrale il primo teorema della media. Potremo scrivere, in sua vece,

$$r \bar{\varepsilon f},$$

dove $\bar{\varepsilon f}$ è valore intermedio fra quelli assunti da $\varepsilon \left(t - \frac{s}{c} \right) \cdot f$ nell'intervallo di integrazione.

Introducendo qui ancora la massima corda l di S, si ha in definitiva il contributo proveniente da una coppia $dS, d\sigma'$, sotto la forma

$$\frac{1}{c} dS d\Omega l \bar{\varepsilon f} \frac{r}{l}.$$

Ove si pensi che, per esaurire tutti i $d\sigma'$ associabili a un generico dS , bisogna integrare all'intera sfera unitaria Ω , ne deduciamo immediatamente

$$W = \frac{l}{c} \int_S dS \int_{\Omega} \bar{\varepsilon f} \cdot \frac{r}{l} d\Omega.$$

Detto λ il limite superiore dei valori di ε per tutti i punti del campo, e per tutto l'intervallo di tempo, che si vogliono considerare, sarà manifestamente $\bar{\varepsilon f} \frac{r}{l} \leq \lambda \left(\text{dacchè } f \text{ e } \frac{r}{l} \text{ sono entrambe } \leq 1 \right)$. Quindi, tutto essendo positivo,

$$W \leq \frac{l}{c} \lambda \int_S dS \int_{\Omega} d\Omega.$$

L'integrale interno vale 4π , talchè risulta

$$W \leq \frac{l}{c} \lambda \cdot 4\pi S;$$

e di conseguenza, al convergere di S a zero attorno al solito punto M,

$$(14) \quad \lim_{S \rightarrow 0} \frac{W}{S} = 0.$$

11. — DENSITÀ DELL'ENERGIA u - DIMOSTRAZIONE DELLA (7).

Abbiamo posto

$$U = V + W.$$

La densità di energia u in un punto M è, per sua definizione, il limite del rapporto $\frac{U}{S}$, quando S converge a zero attorno ad M . Avendo separatamente dalle (13') e (14) i limiti di $\frac{V}{S}$ e di $\frac{W}{S}$, siamo senz'altro in grado di concludere

$$u_M = \lim_{S=0} \frac{U}{S} = 4\pi K_M,$$

c. d. d.

12. — ENERGIA RAGGIANTE Edt , CREATA PER EMISSIONE ENTRO S NEL TEMPUSCOLO dt .

Ogni dS ne emette complessivamente, tutt'all'intorno, $4\pi \cdot sdS \cdot dt$. Ciò val quanto dire che, se Edt rappresenta tutta l'emissione di un campo finito S , durante dt , quando il campo si fa convergere a zero attorno ad un punto determinato M ,

$$(15) \quad \lim_{S=0} \frac{E}{S} = 4\pi \epsilon_M.$$

13. — ENERGIA RAGGIANTE Adt , ANNIENTATA PER ASSORBIMENTO ENTRO S NEL TEMPUSCOLO dt .

Il comportamento di A è più riposto che non quello di E , dacchè l'assorbimento si opera lungo il percorso d'ogni singolo raggio, su cui viaggia dell'energia. Conviene quindi aver riguardo a tutti i possibili raggi, distinguendoli, come già a § 6, in due categorie, a norma della loro origine. Questa può cadere in un $d\sigma$ del contorno, attraverso cui l'energia raggiante penetra nel campo S ; ovvero in un dS , da cui viene emessa. L'estremo del raggio cadrà, in ogni caso, in un $d\sigma'$ del contorno, il primo che si incontra a partire dall'origine: colla quale specificazione (superflua per contorni convessi) si è sicuri di considerare tutti i raggi interni al campo, e ciascuno una volta sola, scindendoli in varietà elementari ∞^4 aventi gli estremi nei vari $d\sigma, d\sigma'$, oppure nei vari $dS, d\sigma'$.

Valuteremo separatamente i contributi all'assorbimento Bdt e Cdt delle due specie di raggi.

Calcolo di B. — Consideriamo la varietà elementare ∞^4 di raggi che hanno origine in $d\sigma$, e escono attraverso $d\sigma'$, riprendendo le notazioni del § 7. Ognuno di questi raggi è, a meno di infinitesimi, confondibile col segmento PP' . L'energia emessa da $d\sigma$, durante il tempuscolo dt , vale

$$G d\sigma d\Omega dt;$$

di cui, alla distanza s da P, arriva soltanto una frazione f , dipendente dall'assorbimento lungo il tratto $\overline{PQ} = s$, ed eguale ad 1 per $s = 0$.

In virtù della legge sperimentale dell'assorbimento, l'ulteriore assorbimento nel tratto compreso fra s e $s + ds$ è dato da

$$f G d\sigma d\Omega dt \cdot \alpha ds,$$

essendo α il coefficiente d'assorbimento in Q nell'istante che si considera. Esplicitando G (come a § 7) e sommando gli assorbimenti dei singoli elementi ds , si ha

$$d\sigma d\Omega dt \cos \widehat{nr} \int_0^r H \left(t - \frac{s}{c} \right) f \alpha ds,$$

ovvero (sempre come a § 7)

$$(16) \quad dt d\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{ H\alpha + r\Psi \},$$

in cui $H\alpha$ si riferisce al punto P e all'istante t , e Ψ designa una funzione dotata di limite superiore finito.

In luogo di $H\alpha$, si può scrivere

$$\mathfrak{H}\alpha_M + \zeta,$$

essendo \mathfrak{H} definita dalla (10) e

$$\zeta = (\alpha_P K_P - \alpha_M K_M) - \sum \frac{x' - x}{r} \left\{ \left(\alpha k \frac{\partial K}{\partial x} \right)_P - \left(\alpha k \frac{\partial K}{\partial x} \right)_M \right\}.$$

Ma a ζ (ammesso che il coefficiente d'assorbimento α sia esso pure finito e continuo insieme con le sue derivate prime) è lecito attribuire la forma

$$\overline{PM} \psi,$$

ψ restando finita anche quando S converge a zero attorno ad M.

Posto ancora

$$\frac{r}{l} \Psi + \frac{\overline{PM}}{l} \psi = \Psi^*,$$

(con che — l designando, al solito, la massima corda del campo — anche Ψ^* rimane finita), si ha

$$H\alpha + r\Psi = \mathfrak{H}\alpha_M + l\Psi^*.$$

Fatta la corrispondente sostituzione nella (16), si possono senz'altro sommare i contributi elementari, integrando debitamente rispetto a $d\sigma$ e a $d\sigma'$. Come si è detto a proposito di V, l'integrazione interna rispetto a $d\sigma$ va estesa non a tutto σ , ma a σ^* .

Il risultato è ciò che abbiamo comprensivamente chiamato Bdt . Sopprimendo il dt , si ha la cercata espressione di B:

$$(17) \quad B = \alpha_M \int_{\sigma} d\sigma' \int_{\sigma^*} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{S + l\Psi^*\}.$$

Di qua, tenuto conto dei lemmi del § 8, scende subito, come al § 9,

$$(17') \quad \lim_{S=0} \frac{B}{S} = 4\pi K_M \alpha_M.$$

Calcolo di C. — Con procedimento analogo a quello usato per B, si ha il contributo elementare, proveniente da una coppia $dS, d\sigma'$, sotto la forma

$$dS d\Omega dt \int_0^r \varepsilon \left(t - \frac{s}{c}\right) f\alpha ds,$$

essendo manifesto il significato delle notazioni (cfr. § 10).

Cdt non è che la somma di tutti questi contributi; perciò

$$C = \int_S dS \int_{\Omega} d\Omega \int_0^r \varepsilon \left(t - \frac{s}{c}\right) f\alpha ds.$$

Operando come a § 10, si applica all'integrale interno (rispetto ad s) il teorema della media, ecc. Si constata, così, che, quando S converge a zero attorno ad M ,

$$(18) \quad \lim_{S=0} \frac{C}{S} = 0.$$

Comportamento limite di $A = B + C$. — Dalle (17') e (18) si ha immediatamente

$$(19) \quad \lim_{S=0} \frac{A}{S} = 4\pi K_M \alpha_M.$$

14. — BILANCIO DELL'ENERGIA RAGGIANTE.

La quantità totale di energia raggiante U , esistente, in un dato istante t , entro S , può esprimersi, mediante la densità u , sotto la forma

$$U = \int_S u dS.$$

La sua variazione durante un tempuscolo dt è, conseguentemente,

$$(20) \quad \dot{U} dt = dt \int_S \frac{\partial u}{\partial t} dS.$$

Al limite, per S convergente a zero attorno ad M , dalla (20) si ha

$$(20') \quad \lim_{S=0} \frac{\dot{U}}{S} = \frac{\partial u_M}{\partial t}.$$

Ciò premesso, osserviamo che la natura del fenomeno, a cui va attribuita la variazione di U , consente di calcolare la stessa variazione in un altro modo. E precisamente, dacchè si tratta di irraggiamento puro, sfruttando la circostanza che variazioni di energia entro S possono prodursi per le seguenti tre cause (e per queste soltanto):

1° per emissione, con che si crea energia raggianti, e si ha (§ 12), in capo al tempuscolo dt , una variazione positiva $E dt$;

2° per assorbimento, con che si distrugge energia raggianti, e si ha (§ 13), in capo allo stesso tempuscolo, una variazione negativa $-A dt$;

3° per flusso (dall'esterno) attraverso il contorno σ , con che si ha (§ 3) la variazione

$$dt \int_{\sigma} \mathfrak{F}_n d\sigma = - dt \int_S \operatorname{div} \mathbf{F} dS,$$

la quale *a priori* può essere positiva o negativa.

La variazione totale ammonta, pertanto, a

$$dt \left\{ E - A - \int_S \operatorname{div} \mathbf{F} dS \right\}.$$

Eguagliando a $\dot{U} dt$, si ricava, sotto forma globale, valida per qualsiasi porzione S del mezzo irradiante, la equazione fondamentale dell'irraggiamento puro

$$(21) \quad \dot{U} = E - A - \int_S \operatorname{div} \mathbf{F} dS.$$

15. — EQUAZIONE INDEFINITA DELL'IRRAGGIAMENTO.

Dalla (21) si passa ovviamente ad una equivalente condizione locale, dividendo per S , e facendo convergere S a zero attorno ad un generico suo punto M .

In base alle (20'), (15) e (19), risulta (sopprimendo l'indice M , ormai superfluo, perchè tutto si riferisce ad uno stesso punto del mezzo)

$$(22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4\pi\varepsilon - 4\pi K\alpha - \operatorname{div} \mathbf{F},$$

valida in ogni punto e in ogni istante, qualunque sia il regime.

Se si ritorna al caso particolare della stazionarietà sotto temperatura costante, u è costante ed \mathbf{F} nullo, e rimane

$$\varepsilon = K\alpha,$$

cioè la (6). Si ha quindi, in quanto precede, una nuova dimostrazione di questa fondamentale relazione della teoria del calore raggiate in condizione di equilibrio termodinamico.

Torniamo al caso generale e ricordiamo, dal § 1, che è ragionevole ammettere che ϵ, α, K , sotto qualunque regime, dipendano soltanto dalla temperatura e seguitino, per conseguenza, a verificare la (6).

La (22) si riduce, così, alla forma definitiva

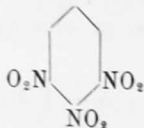
$$(I) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \operatorname{div} F,$$

già annunciata nella Nota precedente. Converrà ricercarne ed illustrarne taluna conseguenza suscettibile di controllo sperimentale.

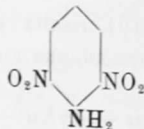
Chimica. — *La trinitrobenzina vicinale 1. 2. 3; un nuovo trinitrotoluene e prodotti dinitroalogeno-sostituiti corrispondenti.*
Nota del Socio G. KOERNER e del dott. A. CONTARDI.

1. *Trinitrobenzina 1. 2. 3.*

Delle tre trinitrobenzine, previste dalla teoria, due sole sono finora conosciute, e cioè la simmetrica 1. 3. 5 e la asimmetrica 1. 2. 4, da noi per la prima volta allo stato puro descritta. Mancava ancor la vicinale 1. 2. 3



e tutti i tentativi fatti per ottenere tale sostanza, sia per nitratura diretta della meta- o della orto-dinitrobenzina, sia per via indiretta, non condussero alla sostanza cercata. Noi abbiamo invece facilmente raggiunto il desiderato scopo, sostituendo con un gruppo nitrosilico quello amidico della β -dinitroanilina



fusibile a $137^{\circ}.8$, già da tempo conosciuta ⁽¹⁾.

Si sospesero gr. 18 di questa dinitroanilina, finamente polverizzata, in gr. 45 di acido nitrico della densità 1.38, e si saturò la miscela, raffred-

⁽¹⁾ Körner, Gazz. chim. it., vol. IV, pag. 324 (1874).