ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Matematica. — *Sulle funzioni assolutamente continue*. Nota di WITOLD WILKOSZ [1], presentata dal Socio C. SEGRE.

Diremo, col prof. Vitali (secondo una locuzione da tutti accettata), *assolutamente continua* una funzione $f(z)$ definita per $a \leq z \leq b$, se per ogni dato $\sigma > 0$ esiste un ε tale che: *Se* (α_r , β_r) *sono, per* $s = 1 , 2 , 3 , \ldots$, *segmenti distinti interni all'intervallo* (a , b) *di somma minore di* ε, *la somma delle corrispondenti variazioni* $f(\beta_r) - f(\alpha_r)$ *non supera* σ. Ogni tale funzione è anche continua ed a variazione limitata.

I segmentini (α_r , β_r) possono anche essere in numero infinito; e la definizione posta non cambia di significato, se alle variazioni $f(\beta_r) - f(\alpha_r)$ sostituiamo il loro valore assoluto, cioè l'ampiezza dell'intervallo percorso da y, quando x percorre (α_r , β_r).

Un classico teorema del Vitali dice che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista* $f'(z)$ (*escluso al più un gruppo di misura nulla*), *e* $\int f'(z)\, dz = f(z) + \text{cost}$, *è che* $f(z)$ *sia assolutamente continua.*

Noi ci chiediamo: *Quando è vero il teorema dell'integrazione per sostituzione?* cioè: *Quando dalla* $y = \int \psi(z)\, dz$ *e dalla* $z = \varphi(x)$ *si può dedurre*

$$y = \int \psi(z)\, \varphi'(x)\, dx + \text{cost} ?$$

Intanto, per ipotesi, la y è funzione assolutamente continua di z; e, se il teorema fosse vero, la y si dovrebbe poter considerare anche come funzione assolutamente continua della x. Intanto è ben naturale di richiedere che il teorema sia esatto per $y = z$, e quindi supporre la $z = \varphi(x)$ funzione assolutamente continua della x. Il seguente ragionamento potrebbe anzi far credere alll'esattezza del nostro teorema nell'ipotesi che:

1°) se $z = \varphi(x) = \varphi'(x)\, dx$, cioè se z è funzione assolutamente continua della x;

[1] L'A. della presente Nota è soldato nell'esercito austriaco; e io non ne ho ora notizia. Questa Nota contiene il risultato essenziale, che mi sembra nuovo e importante, di un lavoro consegnatomi in esame per la pubblicazione. Io ne ho rifatto la redazione, e ho cercato di porre in chiara luce il punto essenziale (secondo me) della questione trattata. Il presente lavoro dimostra errato un teorema enunciato (a quanto mi scriveva l'A.) in una recente edizione di un celebre trattato di analisi infinitesimale.

G. FUBINI

2°) se, variando x nel suo intervallo, la z varia nel campo ove è definita la y.

Infatti, essendo y funzione assolutamente continua della z, dato ad arbitrio un $\sigma > 0$, esiste un σ_1 tale che, se la z percorre segmenti distinti di somma inferiore a σ_1, le corrispondenti variazioni di y hanno somma minore di σ. Ed essendo z funzione assolutamente continua della x, si possono a z far percorrere segmenti di somma inferiore a σ_1, purchè si facciano percorrere alla x segmenti di somma inferiore ad un ε abbastanza piccolo; e in tal caso le variazioni corrispondenti della y hanno una somma minore di σ: la y, cioè, è funzione assolutamente continua della x.

Sarebbe dunque in ogni caso *lecita l'integrazione per sostituzione, quando alla variabile di integrazione z si sostituisca una x tale che z sia funzione assolutamente continua della x.*

Ma il precedente ragionamento è errato, perchè, pure essendo *distinti* i segmenti percorsi dalla x, possono non essere *distinti* i segmenti percorsi dalla z; cosicchè nulla si può dedurre circa le corrispondenti variazioni della y. E che anche il risultato sia falso noi proveremo qui sotto con un esempio. Ma la stessa nostra osservazione ci indica due casi molto importanti, *in cui tale integrazione per sostituzione è lecita.*

1°) *La z è funzione crescente* (o decrescente) *della x*. In tal caso infatti, se la x percorre segmenti distinti, anche la z percorre segmenti distinti.

2°) *La funzione $\psi(z)$ da integrare,* $\left[y = \int \psi(z)\, dz \right]$, *è limitata.*

In tal caso infatti, sia H una costante maggiore di tutti i valori di $|\psi(z)|$; quando la z percorre segmenti *anche non distinti* di somma minore od uguale a $\sigma_1 = \frac{\sigma}{H}$, le variazioni corrispondenti della y non superano σ (¹).

I precedenti risultati si possono estendere anche a integrali tra limiti infiniti.

Ecco l'esempio a cui abbiamo sopra accennato:

Sia $y = F(z)$ definita ponendo

$$F(0) = 0 \quad , \quad F\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{n+1} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$F(z)$ funzione lineare della z in ogni intervallo $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

(¹) Il primo di questi teoremi è dovuto al Lebesgue (Ann. Fac. des sciences Toulouse, 1909, pag. 44). Cfr. anche Hobson, Proceed. of the London Mathem. Soc., 1910.

La $F(s)$ è continua, decrescente, a vaziazione limitata; i numeri derivati essendo infiniti nel solo punto $s=0$, la $F(s)$ ne è l'integrale indefinito; e quindi $F(s)$ è assolutamente continua.

Sia $s=\varphi(x)$ definita ponendo

$$\varphi(0)=0 \quad ; \quad \varphi\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)=\frac{1}{2^n}\,,\ \varphi\left(\frac{1}{2^{2n+1}}\right)=0 \quad \text{per} \quad n=0\,,1\,,2\,,\ldots$$

Sia $\varphi(x)$ lineare in ogni intervallo $\left(\frac{1}{2^n}\,,\frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Anche $\varphi(x)$ è del pari assolutamente continua.

Invece la $y=F[\varphi(x)]$ non è funzione assolutamente continua della x. Infatti, le sue variazioni corrispondenti ai segmentini in cui l'intervallo $(0\,,1)$ è diviso dai punti

$\frac{1}{2^{2i}}\,,\frac{1}{2^{2i-1}}\,,\ldots,\frac{1}{2}$, hanno per somma $2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i+1}\right)-1$;

la quale non solo non è limitata, ma anzi, per $i=\infty$, ha ∞ come limite. Quindi la y, pensata come funzione della x, non è neanche a variazione limitata.

Chimica. — *Ricerche sulla stricnina e brucina* [1]. Nota di R. Ciusa e L. Vecchiotti, presentata dal Socio G. Ciamician [2].

Come è stato dimostrato da uno di noi insieme con G. Scagliarini, per azione del bromo sulla soluzione acetica dell'isostricnina e successivo trattamento con alcool bollente del perbromuro che così si forma, si ottiene una sostanza $C_{23}H_{28}O_2N_2Br_4$. A questa sostanza, in base ai risultati dell'analisi ed al modo di formazione, fu assegnata la costituzione indicata dalla formula:

$$HBr(C_{20}H_{21}NBr_3)\left\langle\begin{matrix}COOC_2H_5\\ NH\end{matrix}\right. \quad [3].$$

Le esperienze che formano oggetto di questa Nota hanno confermato che la sostanza $C_{23}H_{28}O_2N_2Br_4$ è il bromidrato della base $C_{23}H_{27}O_2N_2Br_3$.

La sostanza $C_{23}H_{28}O_2N_2Br_4$, sciolta in molta acqua a freddo, fornisce, per aggiunta di ammoniaca diluita un precipitato bianco che, da prima amorfo, diventa poi cristallino: lavato con acqua e seccato su acido solforico nel

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Bologna.
[2] Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1914.
[3] Questi Rendiconti, XXI, 2°, pag. 84.