ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 dicembre 1914.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota III (part. 1ª): *La fatica studiata nel preparato frenico-diaframmatico*, del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Calcolo della gravità alla superficie di un pianeta omogeneo.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

Siano:

S lo spazio occupato dal pianeta;

σ il suo contorno che intenderemo convesso;

n la normale al contorno stesso, vòlta verso l'interno;

R la mutua distanza fra un generico punto dello spazio S ed un punto fisso, del quale indico con a, b, c le coordinate cartesiane e che verrà, in fine, scelto opportunamente.

Porremo

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$\mathrm{R}(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$\mathrm{R}(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2},$$

dove ξ, η, ζ rappresenteranno le coordinate dell'elemento generico $d\sigma$ della superficie σ, oppure del generico elemento dS dello spazio S, secondo i casi.

Inoltre, indicheremo con V la funzione potenziale newtoniana.

Nell'*interno* di S, si ha

$$4\pi R^2 = \int_\sigma R^2 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma - \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{d(R^2)}{dn} d\sigma - \int_S \frac{\Delta^2 R}{r} dS,$$

dove la R sotto i segni d'integrale verrà intesa come funzione delle ξ, η, ζ, mentre la R del primo membro verrà intesa funzione delle x, y, z.

Ma

$$\Delta^2 R = 6,$$

quindi

$$\int_S \frac{\Delta^2 R}{r} dS = 6 \int_S \frac{dS}{r} = 6 \frac{V}{\mu},$$

denotando μ il prodotto della densità del pianeta per la costante della gravitazione universale.

Sicchè

$$4\pi R^2 = -6\frac{V}{\mu} + \int_\sigma R^2 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma - \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{d(R^2)}{dn} d\sigma. \tag{1}$$

Si ponga, per un momento,

$$J = \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{d(R^2)}{dn} d\sigma;$$

e si osservi che

$$J = 2\int_\sigma \frac{(\xi - a)\cos\widehat{n\xi} + (\eta - b)\cos\widehat{n\eta} + (\zeta - c)\cos\widehat{n\zeta}}{ds} d\sigma = \tag{2}$$

$$= 2\Sigma\int_\sigma \frac{(\xi - a)\cos\widehat{n\xi}}{r} d\sigma = 2\Sigma\int_\sigma \frac{\xi\cos\widehat{n\xi}}{r} d\sigma - 2\Sigma a\int_\sigma \frac{\cos\widehat{n\xi}}{r} d\sigma.$$

Si costruisca la funzione

$$H = \Sigma x\int_\sigma \frac{\cos\widehat{n\xi}}{r} d\sigma - \Sigma\int_\sigma \frac{\xi\cos\widehat{n\xi}}{r} d\sigma. \tag{3}$$

Potremo anche scrivere

$$H = \Sigma\int_\sigma \frac{x - \xi}{r}\cos\widehat{n\xi}\, d\sigma = -\Sigma\int_\sigma \cos\widehat{r\xi}\cos\widehat{n\xi}\, d\sigma = -\int_\sigma \cos\widehat{rn}\, d\sigma.$$

Si osservi, poi, che, avendosi

$$V = \mu \int_S \frac{dS}{r} = \frac{\mu}{2} \int_S \Delta^2 r \, dS = -\frac{\mu}{2} \int_\sigma \frac{dr}{dn} d\sigma = -\frac{\mu}{2} \int_\sigma \cos \widehat{rn} \, d\sigma ,$$

resulta

$$H = 2 \frac{V}{\mu} .$$

Sicchè la (3) può scriversi

$$\Sigma \int_\sigma \frac{\xi \cos \widehat{n\xi}}{r} d\sigma = -\frac{2V}{\mu} + \Sigma x \int_\sigma \frac{\cos \widehat{n\xi}}{r} d\sigma .$$

E quindi, sostituendo nella (2),

$$J = -4 \frac{V}{\mu} + 2 \Sigma (x-a) \int_\sigma \frac{\cos \widehat{n\xi}}{r} d\sigma .$$

Ma

$$\int_\sigma \frac{\cos \widehat{n\xi}}{r} d\sigma = -\int_S \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{\partial}{\partial x} \int_S \frac{dS}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial x} ,$$

e le due analoghe. Dunque

$$\mu J = -4V + 2\Sigma (x-a) \frac{\partial V}{\partial x} .$$

Finalmente, sostituendo nella (1), ottengo

$$4\pi\mu R^2 = -2V - 2\Sigma(x-a)\frac{\partial V}{\partial x} + \mu \int_\sigma R^2 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma .$$

Ovvero

$$2\left(V + R \frac{dV}{dR}\right) = -4\pi\mu R^2 + \mu \int_\sigma R^2 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma .$$

Ora, si tenda, col punto (x, y, z), verso un punto, (x_0, y_0, z_0), del contorno. Come limite si ottiene

$$2V_0 + 2R_0 \left(\frac{dV}{dR}\right)_0 = -2\pi\mu R_0^2 + \mu \int_\sigma R^2 \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn} d\sigma . \tag{4}$$

Ciò premesso, si prenda il punto fisso (a, b, c) all'esterno di S e sulla normale al contorno di S, condotta per il punto fisso (x_0, y_0, z_0). Avremo, allora,

$$\left(\frac{dV}{dR}\right)_0 = \left(\frac{dV}{dn}\right)_0 .$$

E, poichè, chiamando con W la funzione $V+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$, dove ω rappresenta la velocità angolare del pianeta, si ha

$$g=\frac{dW}{dn},$$

essendo g l'accelerazione gravitazionale alla superficie del pianeta stesso, e, inoltre, ponendo, per brevità,

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=\varphi,$$

resulta

$$\frac{dV}{dn}=g-\frac{d\varphi}{dn},$$

ottengo

$$2R_0g_0=2\left\{R_0\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0-V_0-\pi\mu R_0^2\right\}+\mu\int_\sigma R^2\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn}d\sigma\,.$$

E, poichè

$$V_0=-\frac{\mu}{2}\int_\sigma\cos\widehat{r_0n}\,d\sigma=\frac{\mu}{2}\int_\sigma r_0^2\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn}d\sigma,$$

ed inoltre

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0=\omega^2(x_0\cos\widehat{n_0x}+y_0\cos\widehat{n_0y}),$$

potremo anche scrivere

$$2R_0g_0=2\left\{\omega^2R_0(x_0\cos\widehat{n_0x}+y_0\cos\widehat{n_0y})-\pi\mu R_0^2\right\}+$$
$$+\mu\int_\sigma(R^2-r_0^2)\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dn}d\sigma\,.$$

Formula che porge (potendosi sempre intendere R_0 diversa da zero) il valore dell'accelerazione gravitazionale alla superficie del pianeta e che ho voluto stabilire anche per mostrare, conseguentemente, un procedimento che permetta, *mediante operazioni semplici*, di calcolare, *con approssimazione spinta oltre quanto ci piace*, il valore della gravità alla superficie del pianeta stesso.

Infatti, scomponendo la superficie σ in porzioni $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, avremo

$$\int_\sigma=\int_{\sigma_1}+\int_{\sigma_2}+\cdots+\int_{\sigma_m}\,.$$

Per cui, se indichiamo con R_1 ed r_{01} rispettivamente i valori delle distanze del punto (a, b, c) e del punto (x_0, y_0, z_0) da un punto arbitrario della σ_1, ed attribuendo significati analoghi ad R_2 ed $r_{02}, \ldots$, ad R_m ed r_{0m}, e, inoltre, designando con $\Omega_{01}, \Omega_{02}, \ldots, \Omega_{0m}$ i valori degli angoli solidi, secondo cui si vedono, dal punto (x_0, y_0, z_0), rispettivamente le $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, avremo che l'espressione

$$\Omega_{01}(R_1^2 - r_{01}^2) + \Omega_{02}(R_2^2 - r_{02}^2) + \cdots + \Omega_{0m}(R_m^2 - r_{0m}^2)$$

porgerà un valore approssimato dell'integrale

$$\int_\sigma (R^2 - r_0^2) \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\right)}{du} d\sigma .$$

L'approssimazione potrà, evidentemente, essere spinta oltre quanto ci piace, aumentando convenientemente il numero delle parti in cui viene scomposta la superficie del pianeta.

Meccanica. — *Sopra l'equilibrio astatico e sull'equivalenza di due sistemi astatici*. Nota di Matteo Bottasso, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica fisica. — *Sulla deposizione catodica dei metalli in presenza di basi organiche. I. Zinco* [1]. Nota di Arrigo Mazzucchelli, presentata dal Socio E. Paternò.

In una mia Nota recente [2], studiando la deposizione elettrolitica dell'antimonio in presenza di colloidi, ho avuto occasione di osservare che il deposito che si ha in presenza di chinina è assai simile, per le sue proprietà, a quello ottenuto con gelatina, ed ho accennato che simile comportamento era da attendersi anche da altre basi organiche. Colla presente Nota preliminare rendo conto delle esperienze finora eseguite a verifica di quella supposizione.

Piuttosto che sull'antimonio, ho sperimentato sullo zinco, che, pur essendo capace di dare ottimi depositi catodici è particolarmente sensibile, come è noto, alle influenze perturbatrici. Come elettrolito ho scelto la soluzione [3]

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Roma.

[2] Gazz. Chim., *44*, 2, 1914 (401-419).

[3] Schlötter, Galvanostegie, 109.