ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 dicembre 1914.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque, in una priva di punti multipli.* Nota del Corrispondente Francesco Severi.

Il problema di trasformare birazionalmente una superficie algebrica qualunque F, in una priva di punti multipli, appartenente ad uno spazio lineare S_r (1), è stato oggetto di molte ricerche, tra le quali ricorderò quelle di Noether, Del Pezzo, Kobb, Segre, B. Levi (2), all'ultimo dei quali è dovuta la completa dimostrazione della possibilità di tale trasformazione.

Poichè trattasi di una questione che costituisce il presupposto fondamentale di quasi tutte le ricerche di geometria sopra una superficie alge-

(1) Problemi equivalenti a questo sono, com'è noto, quello di costruire una superficie priva di punti multipli, di cui la data F possa considerarsi come proiezione (biunivoca), o quello di costruire una trasformata birazionale di F, che appartenga ad S_3 ed abbia soltanto singolarità ordinarie (linea doppia nodale e punti tripli su questa).

(2) Per le indicazioni bibliografiche rimando alla Memoria di Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* [Annali di Matematica (2), 25, 1896], nonchè ai successivi lavori di B. Levi, *Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche,* ecc. [ibidem (2), 26, 1896]; *Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari,* ecc. [ibidem (3), 2, 1899]; *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie* (Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, 33, 1897); *Sulla trasformazione dell'intorno di un punto,* ecc. (ibidem, 35, 1899). La dimostrazione, cui ho alluso nel testo, è contenuta nel terzo di questi lavori (ved. anche un riassunto nei Comptes rendus, 134, 1902, pag. 222), sul fondamento delle precedenti ricerche di Segre e degli ulteriori sviluppi dati dallo stesso Levi negli altri tre lavori.

brica, e che ha inoltre un interesse innegabile anche dal punto di vista della teoria delle funzioni analitiche ([1]), credo di far cosa utile esponendone qui una risoluzione, che è di gran lunga più semplice di quella conosciuta.

La mia dimostrazione si svolge fondandosi soltanto sul concetto di composizione delle singolarità, qual'è precisato nella Memoria del Segre, e sul fatto, ivi dimostrato, che le prime polari dei punti dello spazio S_3, rispetto alla superficie F, contengono tutti i punti multipli, distinti ed infinitamente vicini della F. La linea direttiva del procedimento ch'io seguo, si può indicare in poche parole; e, se non si fosse trattato di argomento così delicato, che mi ha indotto ad approfondire anche le affermazioni di carattere più intuitivo ([2]), avrei potuto contenere questa Nota in limiti assai più ristretti.

Il concetto semplificatore è espresso sopratutto dalla proposizione che una curva C, variabile con continuità nello spazio, non può abbassarsi di genere, senza acquistare *nuovi* punti multipli (lemma β). Oltre a questo, premetto altri due lemmi: l'uno afferma, in sostanza, che la varietà razionale rappresentata nello spazio S_3 dal sistema di tutte le superficie d'ordine l assai alto, che passano con molteplicità *convenienti* per un dato gruppo base G, di un numero finito di punti — a distanza finita o infinitesima tra di loro — è priva di punti multipli (lemma α); e l'altro si riferisce alla natura delle singolarità che può presentare la curva intersezione di due superficie, le quali non abbiano alcuna linea multipla comune (lemma γ).

La difficoltà veramente essenziale, nella risoluzione delle singolarità di una superficie, è data dai *punti multipli proprî*, cioè da quei punti che abbassano il genere delle sezioni piane (o iperpiane) per essi. I punti multipli improprî invece, come vedremo, si fanno sparire con relativa facilità, mediante semplici considerazioni di geometria sopra una curva ([3]).

([1]) Se $F(x, y, z) = 0$ è l'equazione della superficie F, il teorema in questione permette di affermare che le soluzioni dell'equazione precedente, nell'intorno di una soluzione *qualsiasi* (x_0, y_0, z_0), possono rappresentarsi completamente mediante un numero *finito* di sviluppi in serie di potenze di 2 parametri. Donde poi segue (a causa dell'algebricità) che *tutte* le soluzioni di $F = 0$ sono rappresentabili con un numero finito di serie siffatte. Delle singolarità di una superficie analitica $F = 0$, nell'intorno di un suo punto (ove la funzione F sia regolare), si è occupato recentemente G. Dumas (Comptes rendus, 151, 1911, pag. 682; 154, 1912, pag. 1495).

([2]) Veggasi ad esempio l'osservazione del n. 8!

([3]) Questa distinzione, dei punti multipli di una superficie, in proprî ed improprî, corrisponde ad un concetto familiare nella geometria sopra una superficie: quello cioè di curve fondamentali proprie ed improprie di un sistema lineare di curve [Ved. p. es. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie dei XL (3), 10, 1896), n. 8]. Dal punto di vista proiettivo, ho già avuto occasione altra volta (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 15, 1901) di occuparmi della cosa. Ma non sembra che di tale distinzione, la quale parmi essenziale per la risoluzione delle singolarità delle superficie, si sia fatto uso sistematico nelle precedenti ricerche su questo

Un punto multiplo proprio P_1 della superficie F (che supponiamo in S_3) può esser origine di una o più *successioni di punti multipli proprî* infinitamente vicini, variamente ramificate a partire da P_1. Dicendo che i punti $P_1, P_2, \dots, P_k$, *consecutivi* sopra un ramo di curva algebrica tracciato su F e avente l'origine in P_1, formano una successione di punti multipli proprî, intendo che alle curve sezioni di F colle superficie d'ordine l (convenientemente alto) i successivi passaggi per i punti della successione, importino sempre nuovi abbassamenti del genere.

A priori, naturalmente, non può affermarsi che ogni successione di punti multipli proprî di F, abbia un termine (nè, quindi, che le successioni sieno in numero finito). Il ragionamento della prima parte di questa Nota è appunto diretto a provare, in sostanza, che ogni successione di punti multipli proprî di F, è pur successione di punti base del sistema irriducibile $|C|$, staccato su F dal sistema $|\Delta|$ delle prime polari dei punti dello spazio (cosicchè ne segue che le successioni son tutte finite ed in numero finito), e dà il modo per fare sparire di colpo tutti i punti multipli proprî. Ed ecco brevemente come:

Si consideri il sistema $|A|$ staccato su F dalle superficie Φ di ordine l dello spazio, che hanno il comportamento fissato dal lemma α) rispetto al gruppo G dei punti base — distinti e infinitamente vicini — di $|C|$. Sia Q un punto *qualunque* di F, a distanza finita o infinitesima da punti di G, ma distinto da essi. Proviamo, anzitutto, che le A passanti per Q hanno *lo stesso genere* della generica A. Se, invero, il passaggio per Q abbassasse il genere delle A, ogni A per Q acquisterebbe (lemma α), rispetto alla A generica, qualche nuovo punto multiplo. Tenendo conto delle molteplicità d'intersezione in ciascun punto comune alla A variabile e ad una Δ fissata genericamente, e del fatto che Δ contiene *tutti* i punti multipli di F, si conclude che ogni nuovo punto multiplo, acquistato da A, assorbe qualcuna delle intersezioni variabili *semplici* di A con Δ; cioè qualcuna delle intersezioni variabili della superficie Φ, che stacca quella A, colla curva C comune ad F e a Δ, fuori delle linee multiple. Ma questo vuol dire che Q è un punto base di $|C|$, contro il supposto.

Ne deriva che, trasformando birazionalmente F in una superficie F′ di S_r, mediante il sistema semplice $\infty^r\,|A|$, la F′ viene ad esser priva di punti multipli proprî. Dopo ciò, si considerino le forme H di S_r soggette alla condizione di staccare sopra un generico iperpiano, passante per *ogni* punto *comunque* scelto su F′, un'*aggiunta* [nel senso di Castelnuovo (¹)] alla

argomento. Il concetto di punto multiplo *isolato*, non coincide infatti con quello di punto multiplo *proprio*. Un punto multiplo isolato, che appartenga ad una linea multipla di molteplicità inferiore, non è necessariamente proprio.

(¹) *Sui multipli di una serie lineare*, ecc. (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 7, 1893).

curva sezione A' di F' con quell'iperpiano. Prendendo sufficientemente alto l'ordine l delle forme H, mediante considerazioni di geometria sopra una curva (e tenendo conto, beninteso, che F' non ha punti multipli proprî), si riesce a soddisfare con facilità alle condizioni seguenti:

1ª) il sistema lineare completo $|M|$, contenente totalmente le sezioni delle H^l con F', stacca sulla generica sezione iperpiana A', per un punto qualunque di F', una serie lineare completa, priva di gruppi neutri (¹);

2ª) i sistemi $|M|$ ed $|N| = |M - A'|$ non hanno punti base;

3ª) non esistono su F' gruppi di punti, a distanza finita tra loro, che sieno neutri pel sistema $|M|$.

Si trasformi allora F' in una superficie F'' di uno spazio S_d, mediante il sistema semplice ∞^d $|M|$. La trasformazione da F' ad F'' non introduce curve fondamentali, per guisa che ad un punto P, *comunque* scelto su F', risponde un numero finito di punti su F''. Sia P' uno di questi; A' una generica sezione iperpiana per P, ed N una curva di $|N|$ *che non passi per* P. (Una tal curva esiste sempre, essendo soddisfatta la 2ª condizione). Alla curva composta $A' + N$ risponde su F'' una sezione iperpiana $A'' + N'$ riducibile; e la parte N' — omologa di N —, essendo soddisfatta la 3ª condizione, *non passa per* P'. Quanto alla A'' — omologa di A' —, per la 1ª condizione, essa non ha punti multipli; cosicchè, complessivamente, la $A'' + N'$ passa per P' con un punto semplice, e P' è perciò semplice anche per F''. Si è così ottenuta una trasformata F'' di F, priva di punti multipli.

Il metodo esposto può estendersi, senza gravi difficoltà, anche alle varietà superiori; ma di ciò mi occuperò in un'altra Nota.

1. Proposizioni preliminari. — Affinchè il lettore possa subito seguire la linea fondamentale del procedimento, senza essere fin dall'inizio distratto dall'esame di questioni di dettaglio, premetterò l'enunciato di alcuni lemmi, riservandomi di dimostrarli alla fine.

α) Dato nello spazio un gruppo G di k punti $P_1, P_2, \dots, P_k$ — a distanza finita o infinitesima tra di loro (²) — si posson sempre determinare tali molteplicità $s_1, s_2, \dots, s_k$, da assegnarsi nei punti dati, che:

1°) le superficie d'ordine, assai alto, $l (\geq L)$, passanti pei P_i colle molteplicità *assegnate* s_i, non posseggano di conseguenza altri punti base, ed abbiano nei punti P_i molteplicità *effettive* uguali alle assegnate;

2°) imponendo alle superficie suddette l'ulteriore passaggio per un punto *qualunque* Q — a distanza finita o infinitesima da punti di G — non compaiano altri punti base, all'infuori di $Q, P_1, \dots, P_k$, con ivi le molteplicità *effettive* $1, s_1, s_2, \dots, s_k$.

β) *Una curva* A *variabile con continuità nello spazio, non può abbassarsi di genere senza acquistare un nuovo punto multiplo.*

(¹) Cioè di gruppi che presentino una sola condizione alle M.

(²) È appena necessario di avvertire che un siffatto gruppo si assegna dando una curva algebrica che contenga i punti P_i (come semplici o multipli).

È opportuno di chiarir subito che, quando parliamo di un *nuovo* punto multiplo che la A deve acquistare, intendiamo non soltanto che questo punto possa essere distinto dai limiti dei punti singolari variabili, o infinitamente vicino ad uno di essi, ma che possa addirittura *sovrapporsi* ad uno di questi limiti, il quale, in tal caso, viene ad aumentare di molteplicità.

Consideriamo, ad esempio, nello S_4, la superficie F intersezione completa di due forme, che si tocchino in un punto P; e proiettiamo F sullo spazio ordinario, da un punto O della retta che congiunge P con un punto generico di F. La proiezione F' di F verrà a possedere in P', proiezione di P, un punto triplo, che sarà doppio per la linea doppia di F', e tale, inoltre, che una sezione piana di F', condotta per P', avrà il genere inferiore di un'unità rispetto al genere della sezione piana generica A. Orbene, se A varia tendendo a passare per P', due punti doppî di A tendono a P'; e quando A viene a passare per P', essa acquista un nuovo punto doppio, che si sovrappone ai due precedenti, dando luogo, insieme con essi, al punto triplo P'.

Insomma, se ogni punto s-plo di A si considera come « equivalente » ad $\frac{s(s-1)}{2}$ punti doppî, ciò che aumenta è il numero complessivo dei punti doppî equivalenti ai punti multipli di A.

γ) *Sia* A *la curva sezione di una superficie* F *dello spazio, dotata di singolarità qualunque, con una superficie* Φ, *la quale non contenga alcuna linea multipla di* F, *nè abbia con questa in comune alcuna linea infinitesima (semplice o multipla): allora in* o g n i *suo punto la* A *presenta una molteplicità uguale al prodotto delle molteplicità, ivi, di* $F . \Phi$.

2. Trasformazione della superficie F in una priva di punti multipli proprî. — Consideriamo sulla nostra superficie F, dotata di singolarità arbitrarie nello spazio ordinario, il sistema lineare irriducibile (¹) $|C|$ staccato, fuori delle linee multiple di F, dal sistema $|\Delta|$ delle prime polari dei punti dello spazio; e indichiamo con G l'insieme di tutti i punti semplici e multipli, distinti e infinitamente vicini, eventualmente comuni alle C. Si sottintende che, in G, ogni punto comune alle C viene contato una volta sola, a prescindere dalla molteplicità che in quel punto possiede la C variabile.

Indicheremo inoltre genericamente con Φ una superficie passante pei punti del gruppo base G, colle molteplicità richieste dal lemma α); e quando di questa superficie sia fissato l'ordine l, la designeremo con Φ^l. Intenderemo, inoltre, che sia sempre $l \geq L + 1$, ove L è il limite a partire dal quale le Φ^l soddisfanno ad α).

Il sistema $|\Phi^l|$, di tutte le Φ^l, stacca su F un sistema lineare *semplice* $\infty^r|A|$, che non ha altri punti base, all'infuori di quelli del gruppo G

(¹) La irriducibilità di $|C|$ apparisce subito, sotto la forma duale.

(taluni dei quali, eventualmente, posson esser multipli per la A generica). Ci proponiamo di dimostrare che *su* F *non esiste alcun punto* Q, *semplice o multiplo, a distanza finita o infinitesima da punti del gruppo base* G, *tale che le* ∞^{r-1} *curve del sistema* $|A|$, *passanti per* Q, *abbiano tutte genere inferiore rispetto a quello della generica* A.

Suppongasi, se è possibile, che un tal punto Q esista: e dicansi A_0, Φ_0 rispettivamente le A, Φ passanti per esso.

Allorchè la Φ^l variabile viene a passare per Q, la relativa curva A, pel lemma β), acquista (almeno) un *nuovo* punto multiplo M: nuovo, rispetto ai punti multipli fissi e ai limiti dei punti singolari variabili lungo le linee multiple di F.

Domandiamoci anzitutto: dove può cadere M? Suppongasi, dapprima, che M sia variabile con A_0. Allora, se M variasse coincidendo con (o conservandosi infinitamente vicino ad) un punto mobile lungo una linea multipla effettiva di F, quando una A, passante pel punto generico R di questa linea, divenisse una A_0, si altererebbe la *composizione* della singolarità di A in R. Invece, questo non può accadere. Considerando infatti la curva A staccata su F da una Φ^l composta mediante una Φ^{l-1} variabile ed un piano *fisso* π, uscente da R, se Φ^{l-1} va a passare per Q, e diviene Φ_0^{l-1}, la composizione della singolarità di A in R non muta, giacchè Φ_0^{l-1} non passa per R (lemma α).

Nè può darsi che M descriva una linea infinitesima appartenente all'intorno di un punto di G, perchè, altrimenti, o la generica Φ^l incontrerebbe il luogo del punto M, *che dovrebbe esser multiplo per* F (n. 7, oss. 2ª), per lo meno in tanti punti variabili quanti son quelli in cui lo incontra la Φ_0^l (che è una particolare Φ^l), e quindi M non sarebbe per A_0 un punto multiplo essenzialmente nuovo; oppure il luogo di M sarebbe *fondamentale* pel sistema delle Φ^l, e quindi contenuto in ogni Φ_0^l. Cosicchè, in tal caso, il sistema delle Φ_0^l verrebbe ad avere altri punti base (cfr. coll'osservaz. 2ª, del n. 7), oltre quelli assegnati; contrariamente al lemma α). Se, pertanto, M è variabile, si muove di necessità nell'intorno di Q, che risulta allora multiplo per F, in quanto ad esso *succede* il punto M multiplo per F.

Se M resta fisso al variare di A_0, esso si sovrapporrà a Q o ad un punto P di G. Proviamo, intanto, che quest'ultima ipotesi è assurda. Invero. la A_0 avrebbe in P un punto di molteplicità superiore a quella che ivi presenta la generica A, e ciò significherebbe [lemma γ)] o che la Φ_0^l ha in P molteplicità superiore a quella della Φ^l generica, oppure che Φ_0^l ha in comune con F una linea infinitesima dell'intorno di P: circostanze ambedue incompatibili col lemma α).

Infine, se M è fisso e sovrapposto a Q, non può darsi che Q — il quale, si ricordi, è semplice per Φ_0^l [lemma α)] — sia pur semplice per F, chè altrimenti [lemma γ)] le F, Φ_0^l avrebbero in comune anche l'intorno di Q, contrariamente ad α).

Si conclude, pertanto, che il punto M coincide con Q, o si mantiene nell'intorno di Q, che in ogni caso è *multiplo per* F.

Si ricordi, ora, che la generica Δ contiene tutti i punti multipli, distinti e infinitamente vicini, di F: e quindi anche i punti Q, M. Ciò posto, facciamo variare una A, finchè essa venga a passare per Q e divenga, così, una A_0. La curva A_0 viene allora a possedere un *nuovo* punto multiplo su Δ, e s'accresce così il numero delle intersezioni di A_0 con Δ assorbite dai punti multipli di A_0 [1].

Tale accrescimento non può che avvenire a scapito delle intersezioni variabili *semplici* della A variabile con Δ, cioè delle intersezioni variabili della superficie Φ^l che stacca A, colla C segnata su F (fuori delle linee multiple) da Δ. Siccome, infine, le nuove intersezioni semplici, assorbite dai punti multipli di A_0, sono andate a finire nell'intorno di Q, si conclude che Q appartiene a C. E poichè questo vale per la generica C, ne deriva che Q è un punto base di $|C|$, contro il supposto. L'ipotesi iniziale che le A_0 si abbassassero di genere, è pertanto assurda.

Osservazione. — Diciamo $P_1, P_2, \dots, P_k$ una *successione* di punti infinitamente vicini di G, avente l'*origine* in P_1, e $\overline{G}$ il gruppo parziale costituito da quei punti. Supponiamo, inoltre, che nell'intorno di P_k non si trovino altri punti di G. Applicando allora il precedente ragionamento alle superficie Ψ^l d'ordine l assai alto, che passano con molteplicità convenienti pel gruppo $\overline{G}$, si prova che la generica curva sezione di F con una Ψ^l per un punto qualunque Q, dell'intorno di 1° ordine di P_k, ha lo stesso genere della sezione di F con una generica Ψ^l. Ciò significa che *tutte le successioni di punti multipli propri della* F, *son contenute nel gruppo* G: conformemente a quanto abbiamo enunciato nella prefazione. Quest'osservazione non occorre affatto nel seguito; ma tuttavia abbiamo reputato opportuno di farla, perchè illumina maggiormente il nostro procedimento.

3. Si trasformi ora birazionalmente la superficie F in una superficie F′ dello S_r, sulla quale le curve A′, omologhe delle A, sieno staccate dagli iperpiani dello spazio. La F′ risulterà allora priva di punti multipli proprî, e si potrà enunciare il teorema:

Una superficie algebrica qualunque, può sempre trasformarsi birazionalmente in un'altra priva di punti multipli proprî.

4. Trasformazione birazionale d'una superficie algebrica in una affatto priva di punti multipli. — Continuando ad operare sulla superficie F′ ultimamente ottenuta in S_r, consideriamo le forme H^l, d'ordine l assai alto, ciascuna delle quali gode della proprietà di staccare sopra un

[1] Si tenga presente che la molteplicità d'intersezione di una superficie e di una curva — che non stia nè tutta nè in parte sulla superficie — in ognuno dei punti distinti e infinitamente vicini, ad esse comuni, si valuta come se i punti stessi fossero tutti distinti. Ved. Segre, loc. cit., n. 5.

iperpiano, condotto genericamente per *ogni* punto *comunque* scelto su F′, una forma *aggiunta* alla sezione A′ di F′ con quell'iperpiano. Si possono subito ottenere forme siffatte, p. es. nel modo seguente: Si proietti F′ da un S_{r-4} sopra un S_3, e si consideri il cono, di un certo ordine m, che dall'S_{r-4} proietta la prima polare di un punto generico di S_3, rispetto alla superficie proiezione di F′. Aggregando a questo cono una forma qualunque di ordine $l-m$, si avrà una forma d'ordine l soddisfacente alla richiesta condizione, giacchè tale forma passa, con molteplicità $s-1$ almeno, per ogni punto s-plo di F′, e *quindi* (¹), di A′. Le H^l formano un sistema lineare, perchè il fascio individuato da due di esse appartiene tutto al loro sistema.

In forza di una proposizione da me altrove dimostrata (²), si può supporre, crescendo quanto occorre l, che le H^l stacchino, fuori delle intersezioni fisse, una serie lineare completa g_n^s, sulla *generica* sezione iperpiana A′. Anzi, nulla vieta anche di supporre che questa serie sia priva di gruppi neutri; bastando all'uopo di scegliere, p. es., l così grande che risulti $n > 2p$, ove p è il genere di A′.

Dicasi M la curva sezione di una generica H^l con F′, fuori delle linee multiple, ed $|M|$ il sistema lineare *completo* individuato da M (³). Il sistema $|M|$ stacca, sopra una *qualunque* sezione iperpiana irriducibile A_0', una serie lineare che ha la dimensione s, perchè il sistema residuo completo, $|N| = |M - A'|$, è indipendente dalla scelta della sezione iperpiana A′.

Dico che $|M|$ non può avere punti base. Se, invero, fosse P un punto base di $|M|$, sulla generica sezione iperpiana A_0' per P, il sistema $|M|$ staccherebbe, fuori di P, una $g_{n'}^s$, di ordine $n' < n$. Ora, essendo $n > 2p$, per la g_n^s, esistente su A′, si ha $s = n - p$, donde segue $s > n' - p$. Ma ciò è assurdo, perchè sulla A_0', che *ha lo stesso genere p di* A′, si avrebbe una serie $g_{n'}^s$, speciale, di dimensione $s > p$. Risulta anche, da ciò, che $|M|$ stacca sulla sezione di F′, con un iperpiano condotto genericamente per un punto qualunque di F′, una serie *completa* priva di gruppi neutri $(n > 2p)$; mentre prima questo fatto si poteva affermare soltanto in relazione alla generica A′.

Le stesse considerazioni svolte pel sistema $|M|$, si possono ripetere per $|N|$. Aumentando, se occorre, l, si può ottenere che $|N|$ stacchi nella generica A′

(¹) Ved. l'Osservazione del n. 8.

(²) Bertini e Severi, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale* (Atti della R. Accad. delle scienze di Torino, 43, 1908); n. 1 della mia lettera al prof. Bertini.

(³) Qui occorre il concetto di sistema lineare completo di curve sopra una superficie, e l'unicità del sistema lineare completo determinato da una curva. Com'è ben noto, ciò può stabilirsi per via del tutto elementare, come ha fatto Enriques, indipendentemente dalla risoluzione delle singolarità. Potremmo anche dimostrare, senza far uso della risoluzione delle singolarità, che il sistema completo $|M|$ coincide con quello staccato su F dalle H^l: ma ciò è superfluo.

una serie lineare completa g_ν^σ con $\nu > 2p$. Si trarrà allora, come prima, la conclusione che $|N|$ non ha punti base su F′.

È poi superfluo di aggiungere che tanto $|M|$ quanto $|N|$ si posson supporre *semplici*. Quanto ad $|M|$, si osserverà, inoltre, che esso non può possedere gruppi neutri, costituiti da punti a distanza finita tra loro.

Se infatti sono P e Q due punti di F′ *a distanza finita tra loro*, una generica N, insieme con una sezione iperpiana per P e non per Q, dà appunto una M che passa per P e non per Q.

Trasformiamo birazionalmente F′, mediante il sistema semplice $|M|$, in una superficie F″ di uno spazio S_d, sulla quale gli iperpiani stacchino le curve M′, omologhe delle M.

Poichè $|M|$ non ha punti-base, la trasformazione da F′ ad F″ non introdurrà curve fondamentali, sicchè ad *ogni* punto P di F′ non corrisponde se non un numero finito di punti di F″. Sia P′ uno di questi. Si consideri una N che non passi per P: il che è sempre possibile, giacchè $|N|$ non ha punti-base. Dal momento che su F′ non esistono punti *associati* a P rispetto ad $|M|$, a distanza finita da P, la curva N′, omologa di N, non passerà per P′. Diciamo ora A_0' una generica sezione iperpiana di F′, per P; ed A_0'' la curva, *priva di punti multipli*, omologa di A_0' su F″. Alla particolare M, costituita da A_0' e da N, risponde su F″ una sezione iperpiana $A_0'' + N'$, che passa per P′ con un punto semplice (giacchè tal punto giace necessariamente su A_0'' e non su N′).

Dunque P′, che è poi un qualunque punto di F″, è semplice anche per la superficie. E si conclude che:

Ogni superficie algebrica può trasformarsi birazionalmente in un'altra affatto priva di punti multipli.

5. Dimostrazione del lemma α). — Il dato gruppo-base G, cui si allude nell'enunciato del lemma, si potrà scindere anzitutto in gruppi parziali $G_1, G_2, \ldots$, costituiti ciascuno da una successione di punti appartenenti ad un medesimo ramo di curva algebrica. Si sottintende che due di questi gruppi parziali potranno avere in comune l'origine (dei relativi rami) ed anche alcuni dei punti consecutivi; cosicchè, nel gruppo $G_1 + G_2 + \cdots$, qualche punto di G potrà esser ripetuto più volte.

È chiaro che, quando il lemma sia dimostrato per questi gruppi parziali, se ne potrà agevolmente dedurre la sua validità anche per G. Se, invero, in relazione al gruppo G_j il lemma è soddisfatto dalle superficie d'ordine $l \geq L_j$, passanti pei punti di G_j con molteplicità effettive convenienti, profittando delle superficie d'ordine $\sum_j L_j$, composte mediante superficie degli ordini $L_1, L_2, \ldots$, passanti nel modo debito rispettivamente per $G_1, G_2, \ldots$, si verifica subito il lemma α) in relazione al gruppo dato G. Le molteplicità da assegnarsi per le superficie d'ordine $l \geq \sum_j L_j$, nei punti di G, sono precisamente quelle che ivi presentano le suddette superficie spezzate.

Possiamo dunque limitarci al caso in cui il gruppo dato G è costituito dai punti $P_1, P_2, \ldots, P_k$ consecutivi sopra *un* ramo di curva algebrica, coll'origine in P_1.

Si operi una trasformazione birazionale dello spazio S in una varietà razionale normale a tre dimensioni S', riferendo proiettivamente le quadriche per P_1 agl'iperpiani di uno spazio ad otto dimensioni. Sulla S', che è priva di punti multipli, si avrà una superficie fondamentale π_1' (un piano), corrispondente a P_1, ed i punti $P_2', \ldots, P_k'$ — dei quali almeno il primo su π_1' — omologhi di $P_2, \ldots, P_k$. Si trasformi similmente S' in una varietà razionale normale, S'', priva di punti multipli, mediante le quadriche (dello spazio S_8) passanti per P_2'. Sopra S'' si avrà una superficie π_1'' omologa di π_1', un'altra π_2'' omologa di P_2' (e appoggiata a π_1'' secondo una retta), ed infine i punti $P_3'', \ldots, P_k''$ — dei quali almeno P_3'' su π_2'' — corrispondenti a $P_3', \ldots, P_k'$.

Si prosegua così, fino a che si arrivi ad una varietà razionale normale, $S^{(k)}$, priva di punti multipli, sulla quale si abbiano le superficie razionali $\pi_1^{(k)}, \pi_2^{(k)}, \ldots, \pi_k^{(k)}$, imagini dei punti $P_1, P_2, \ldots, P_k$ di S. Questi punti e superficie son evidentemente i soli elementi fondamentali nella corrispondenza birazionale tra S ed $S^{(k)}$ (e tra $S^{(k)}$ ed S).

Alle sezioni iperpiane di $S^{(k)}$, rispondono in S le superficie Φ, di un certo ordine L, passanti pei P_i con certe molteplicità effettive s_i, e non aventi altri punti-base. Le Φ — diciamole Φ_0 — uscenti da un qualsiasi punto Q di S, a distanza finita o infinitesima dai P_i, non hanno in conseguenza in comune nè una curva nè una superficie fissa, che sarebbe fondamentale per la trasformazione tra S ed $S^{(k)}$. Ad esse rispondono le sezioni iperpiane di $S^{(k)}$, passanti per un punto semplice ben determinato $Q^{(k)}$. Poichè una generica di queste sezioni non contiene alcuna delle superficie $\pi_i^{(k)}$, ad essa risponderà una Φ_0 non avente nei P_i molteplicità superiori alle s_i. D'altra parte è poi chiaro che la Φ_0, corrispondente ad una sezione iperpiana non tangente ad $S^{(k)}$ in $Q^{(k)}$, ha in Q un punto semplice.

Profittando delle superficie d'ordine $L+1$ spezzate ciascuna in una delle suddette Φ ed in un piano di S, si verifica subito che il lemma α) è anche vero per le superficie d'ordine $L+1$; e così di seguito.

6. Dimostrazione del lemma β). — Quando la curva A varia con continuità nello spazio, tendendo ad una posizione limite A_0, *dello stesso ordine n di* A, la congruenza Γ_0 delle corde di A_0 fa certamente parte della congruenza limite di quella, Γ, constituita dalle corde di A. Al più, potrà darsi che, per ottenere la congruenza limite, occorra aggiungere a Γ_0 una o più congruenze di rette, che più non sieno corde (nè proprie nè improprie) di A_0. Comunque sia, l'ordine h_0 della Γ_0 risulta non superiore all'ordine h di Γ.

Ricorrendo ad una proiezione delle A , A_0 da un punto generico dello spazio, sopra un piano, si ottengono i loro generi p, p_0:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \tau - h \quad , \quad p_0 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \tau_0 - h_0 ,$$

ove τ , τ_0 sono gli « equivalenti », in punti doppî, dei punti multipli di A , A_0 (assunti $\frac{s(s-1)}{2}$ punti doppî come equivalenti di *ogni* punto s-plo). Poichè la proiezione A_0' di A_0 ha come punti multipli per lo meno i limiti dei punti multipli di A′ proiezione di A, così risulta

$$h + \tau \leq h_0 + \tau_0 \quad , \quad h_0 \leq h \quad , \quad p_0 \leq p .$$

E siccome, inoltre, $h + \tau + p = h_0 + \tau_0 + p_0$, se $p_0 < p$, sarà $\tau_0 > \tau$, che è quanto si voleva provare.

Osservazione. — *Il teorema reciproco di* β) *non è vero*; ma si può affermare, tuttavia, in base alle relazioni precedenti, che, *se aumenta il numero dei punti multipli della* A *variabile, diminuisce o il genere di* A *o il numero de' suoi punti doppî apparenti (o ambedue questi caratteri).* Per avere un esempio del caso in cui aumenta il numero dei punti multipli di A, senza che tuttavia si abbassi il genere della curva, consideriamo il sistema continuo di curve A ottenute, in S_3, proiettando da un punto generico O, di S_4, un fascio di sezioni iperpiane di una superficie F di S_4, avente un punto doppio improprio (isolato). La A_0, proiezione della sezione che passa pel punto doppio improprio, possiede un nuovo punto doppio P_0 (rispetto alla generica A), e tuttavia ha lo stesso genere di A. Nel passaggio da A ad A_0, la congruenza delle corde di A si spezza nella congruenza delle corde di A_0 e nella stella (P_0).

7. Dimostrazione del lemma γ). — Il fatto enunciato è ben noto e d'immediata dimostrazione ([1]) pei punti multipli distinti di A o pei punti semplici a distanza finita dai punti multipli. Basterà dunque stabilire il teorema per una successione $P_1, P_2, \ldots, P_k$ di punti di A, consecutivi sopra un ramo della curva, avente l'origine in P_1.

Si eseguisca una prima trasformazione quadratica dello spazio, col punto fondamentale isolato in P_1 e che sia, pel resto, generica. Alla superficie Φ risponde una superficie Φ', che, per ipotesi, non contiene alcuna parte della curva p_1', corrispondente a P_1, sulla superficie trasformata F′. La Φ' passa inoltre pel punto P'_2 di p_1', omologo di P_2, e il cono tangente a Φ' in P'_2 non contiene, per ipotesi, alcuna parte del cono ivi tangente ad F′; sicchè

([1]) Basta riferirsi alle sezioni di F , Φ con un iperpiano generico pel punto considerato.

la curva A′, corrispondente ad A, ha in P_2' molteplicità uguale al prodotto delle molteplicità che ivi hanno F', Φ'. Ciò significa, in altri termini, che P_2 ha per A, molteplicità uguale al prodotto delle molteplicità ivi di F, Φ. Si eseguisca ora un'altra trasformazione quadratica di F′, ponendo in P_2' il punto fondamentale isolato: se ne dedurrà il fatto enunciato pel punto successivo P_3 di A; e così proseguendo.

Osservazione 1ª. — Il teorema dimostrato vale anche per la curva comune ad una superficie F di uno spazio S_r e ad una forma Φ dello stesso spazio. Il ragionamento è identico, salvo le parole.

Osservazione 2ª. — Quando si considera sopra una superficie F un numero *finito* di punti, semplici o multipli, $P_1, P_2, \ldots, P_k$, consecutivi sopra un ramo di curva algebrica coll'origine in P_1, usando, come prima, di una successione di trasformazioni quadratiche, si possono sciogliere gli intorni (di 1° ordine) di quei punti in altrettante curve effettive distinte (irriducibili o no) della superficie trasformata $F^{(k)}$. È appunto questa possibilità che ci permette di considerare senz'altro, sulla F primitiva, come altrettante curve gl'intorni dei punti dati.

È lecito pertanto di affermare, ad es., che la generica curva A di un sistema lineare |A|, tracciato su F, non può possedere un punto multiplo variabile lungo una linea infinitesima *semplice* della superficie, intorno ad un punto (base per |A|) semplice o multiplo per F (¹).

Così pure, se la generica A non ha intersezioni variabili con una linea infinitesima situata nell'intorno di un punto-base del sistema, questa linea si potrà trattare esattamente, come se fosse un'effettiva curva fondamentale di |A|.

Queste osservazioni ci sono occorse nella dimostrazione del n. 2.

8. Osservazione. — Nella dimostrazione del n. 4 abbiamo affermato che *ogni punto s-plo per la sezione* C *di una superficie* Φ *dello* S_r $(r \geq 3)$, *con un iperpiano condotto genericamente da un punto qualunque* P *di* Φ, *è pure s-plo per la superficie* (²). Crediamo che nessun lettore eleverebbe dubbî su quest'affermazione, anche se non c'intrattenessimo a giustificarla; tanto più, dopo la dimostrazione del lemma γ). Tuttavia, *ad abundantiam*, diamo qui la dimostrazione del fatto asserito.

(¹) Più in generale, il noto teorema « *Una curva* A *variabile entro un sistema lineare sopra una superficie algebrica* F, *non può aver punti multipli variabili in punti semplici di* F » (cfr. p. es. Enriques, loc. cit., n. 5), vale anche pei punti semplici di F situati a distanza infinitesima da punti o linee multiple della superficie. Il ragionamento consueto si riferisce, è vero, a punti semplici a distanza finita da punti multipli di F; ma noi possiamo ridurci a questo caso, assoggettando la data superficie alle trasformazioni indicate ai nn. 2 e 4; giacchè ognuna di queste trasformazioni non muta mai una curva della superficie su cui si opera, in un punto della superficie trasformata.

(²) Nel n. 4 la superficie considerata si chiamava F′ ed A′, la sua sezione iperpiana. Qui, per comodità, abbiamo adottato notazioni nuove senza apici.

La cosa è senz'altro evidente pei punti multipli distinti di C. Esaminiamo dunque p. es. i punti multipli infinitamente vicini a P. Sia $P, P_1, \ldots, P_k$ una *successione* di punti aventi rispettivamente le molteplicità $s, s_1, \ldots, s_k$ per C, talchè P sarà pure s-plo per Φ. Supponiamo che l'iperpiano I, che stacca su Φ la C, sia generico nel senso che non tocchi il cono tangente in P a Φ, nè contenga alcuna delle sue eventuali generatrici essenzialmente multiple (generatrici che rimangon multiple, anche quando ciascuna delle parti multiple del cono si conti semplicemente). Assoggettiamo Φ ad una trasformazione quadratica dello S_r, che abbia il punto fondamentale isolato in P e che sia pel resto generica; e diciamo Φ', C', I' gli enti omologhi di Φ, C, I; ω' la curva corrispondente a P, sulla superficie Φ'. L'iperpiano I' incontra (non tocca) in punti semplici — tra i quali il punto P_1' omologo di P_1 — la curva ω'; e poichè il cono tangente a Φ' in P_1' si spezza in piani passanti per la tangente ivi ad ω' (1), I' non toccherà questo cono, nè conterrà alcuna delle sue generatrici essenzialmente multiple. L'iperpiano I' si troverà pertanto, rispetto a Φ', nelle stesse condizioni in cui si trovava I rispetto a Φ; ed il punto P_1' avrà per Φ' la stessa molteplicità s_1, che ha per C': cioè P_1 avrà per Φ la molteplicità s_1. Così proseguendo, si prova il fatto asserito, per tutti i punti infinitamente vicini a P.

Quanto agli altri punti multipli di C, basterà che pure in essi l'iperpiano I non tocchi il cono ivi tangente a Φ, nè contenga alcuna generatrice essenzialmente multipla; la qual condizione è evidentemente soddisfatta per I generico.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota III (part. 1ª): *La fatica studiata nel preparato frenico-diaframmatico*, del Corrisp. Filippo Bottazzi (2).

In un mio precedente lavoro (3), l'argomento della fatica muscolare fu appena toccato. Con le presenti ricerche mi sono proposto di colmare, almeno in parte, tale lacuna.

La disposizione sperimentale è stata quella medesima che fu adottata nelle precedenti ricerche.

Stimolavo ritmicamente il nervo o il muscolo del preparato frenico-diaframmatico, tenuto nella camera-termostato, con scosse d'apertura di corrente indotta, di frequenza e intensità variabili.

(1) Il cono tangente ad una superficie in un punto semplice O di una sua linea s-pla, si spezza infatti in piani passanti per la tangente t in O alla linea multipla; e ciò perchè t è generatrice s-pla pel suddetto cono (Ved. ad es. Segre, loc. cit., n. 1).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia di Napoli.

(3) Filippo Bottazzi, *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Prima Memoria. Memorie della R. Accad. d. Lincei, in corso di stampa.