ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Secondo la Ioteyko (loc. cit., pag. 95), il Funke avrebbe già osservato un fenomeno simile a quello ora descritto; ma il lavoro del Funke [1] non contiene curve di fatica, nè nel testo vi si accenna affatto. Piuttosto nella figura annessa a un lavoro di Rossbach e Harteneck [2], riproducente una curva di fatica ottenuta mediante stimolazione ritmica del nervo da muscoli di gatto, si veggono ondulazioni regolari; ma sono così piccole (ciascuna di esse comprende solo tre o quattro contrazioni), che probabilmente non hanno nulla di comune col fenomeno da me descritto.

Meccanica. — *Sui metodi d'approssimazione nel calcolo di vene fluenti con moto permanente.* Nota dell'ing. MARIO BARONI, presentata dal Socio G. COLOMBO.

Il prof. Umberto Cisotti, in una sua recente Nota nei Rendiconti di questa R. Accademia dei Lincei (vol. XXIII, serie 5ª, 2° sem., fasc. 8°. Roma, ottobre 1914) *Sull'efflusso di un liquido pesante da un orificio circolare*, espone un metodo approssimato per la ricerca del profilo di una vena fluida (viscosità nulla; moto permanente; volume specifico costante), effluente da un orificio circolare, contenuto in un piano orizzontale.

Il liquido è soltanto sollecitato dal proprio peso: il senso del moto è dall'alto al basso.

La vena fluida ha un asse di simmetria verticale OZ; l'origine O è il centro dell'orificio circolare; il senso positivo dell'asse OZ è pure dall'alto al basso; R è il raggio dell'orificio; c è la velocità media nel piano dell'orificio; g l'accelerazione di gravità; r il raggio della sezione di ordinata z.

L'equazione del profilo della vena (quando nelle funzioni: ψ, funzione di Stokes; φ, funzione potenziale, si trascurino le derivate d'ordine superiore al primo) risulta, dall'autore, essere:

$$z = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right).$$

L'ipotesi della velocità costante, e, perciò, eguale alla media (ossia a $\sqrt{c^2 + 2gz}$), in tutti i punti di una sezione orizzontale della vena, condurrebbe ad una equazione del profilo, identica a quella determinata dal

(1) O. Funke, *Ueber den Einfluss der Ermüdung auf den zeitlichen Verlauf der Muskelthätigkeit*. Pflüger's Arch. VIII, pp. 213-252 (1874).

(2) J. Rossbach und K. Harteneck, *Muskelversuche an Varmblütern*. II. *Ermüdung und Erholung des lebenden Warmblütermuskels*. Pflüger's Arch. XV, pag. 1 (1877).

prof. Cisotti. Infatti, detti c_1 la velocità media ed r il raggio in una sezione $z > 0$ si ha:

$$\begin{cases} \pi c R^2 = \pi c_1 r^2 \\ c^2 + 2gz = c_1^2 ; \end{cases}$$

ed eliminando c_1,

$$z = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right).$$

Dunque il metodo di approssimazione, esposto dal prof. Cisotti, coincide coll'ipotesi della velocità costante nei punti di una stessa sezione piana, praticamente e comunemente accettata nello studio di vene fluenti in macchine idrauliche, od in turbo-ventilatori, quando sia consentito di ritenere il volume specifico costante, e nulla la viscosità.

Ma la ricerca del prof. Cisotti raggiunge un nuovo risultato, di notevole importanza, quando determina i limiti di velocità, oltre i quali l'ipotesi può essere consentita: e trova che l'approssimazione, alla quale è ricorso, può essere valida tutte le volte in cui il rapporto $\frac{2gR}{c^2}$ è una quantità di 1° ordine, cioè quando la velocità media del getto all'orificio è abbastanza grande rispetto alla velocità di caduta libera di un grave (nel vuoto), da una altezza R.

Lo scopo di questa Nota è di dimostrare che a molte altre forme di moto la medesima norma può essere estesa.

1°. Si consideri anzitutto il caso dell'efflusso ascendente di un liquido pesante da un orificio circolare, in uno spazio ove la pressione è costante: il moto abbia un asse di simmetria (OZ) verticale.

Faccio uso delle notazioni, come dalla citata Nota del prof. Cisotti. L'asse positivo delle z sia ancora nel verso dall'alto al basso: r, θ, z, siano le coordinate semipolari di un punto generico; u, v, le componenti radiale ed assiale della velocità, giacente per ipotesi nel piano meridiano; $\frac{da_0}{dz}$ la legge di variazione delle velocità sull'asse di simmetria.

Poichè la sola differenza dal caso trattato dal prof. Cisotti sta nel segno di z, e di c (velocità media all'orificio), che ora sono negativi, la equazione del profilo della vena è identica a quella ottenuta dal Cisotti, quando si trascurino le derivate di a_0, d'ordine superiore al primo, nelle espressioni di ψ e di φ.

Ma, per il diverso segno di z, non può essere identica la ricerca dei limiti entro i quali l'approssimazione può essere consentita.

Nel caso di $z < 0$ si svolge nel seguente modo: È

$$\psi = \frac{1}{2} r^2 \frac{da_0}{dz} + \psi_1 ,$$

dove ψ_1 è il termine trascurato, per la citata approssimazione. Esso è definito dalla eguaglianza

$$\psi_1 = \sum_2^\infty {}_n \frac{(-1)^{n-1} r^{2n}}{[2 \,.\, 4 \ldots (2n)]^2 \, 2n} \frac{d^{2n-1} a_0}{dz^{2n-1}} ,$$

che nel nostro caso, $\left[\left(\frac{da_0}{dz} \right)^2 = 2gz + c^2 \right]$, diventa

$$\psi_1 = 4c \left(\frac{c^2}{2g} \right)^2 \sum_2^\infty {}_n \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (4n-7)}{2^{2n} [2 \,.\, 4 \ldots (2n)]^2 \, 2n} \left(\frac{2gr}{c^2} \right)^{2n} \left(1 + \frac{2gz}{c^2} \right)^{-\frac{4n-5}{2}} ;$$

e, posto $c_1 =$ velocità media nella sezione (z, r)

$$c_1^2 = 2gz + c^2 ,$$

si ha

$$\psi_1 = 4c_1 r^2 \left(\frac{c_1^2}{2gr} \right)^2 \sum_2^\infty {}_n \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (4n-7)}{[2 \,.\, 4 \ldots (2n)]^2 \, 2n} \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{2gr}{c_1^2} \right)^{2n} ,$$

e, tenuto conto che

$$0 < \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (4n-7)}{[2 \,.\, 4 \ldots (2n)]^2 \, 2n} < 1 \quad \text{per} \quad n \leq 2$$

$$\sum_2^\infty {}_n \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{12}$$

$$\sum_2^\infty {}_n \left(\frac{2gr}{c_1^2} \right)^{2n} = \left(\frac{2gr}{c_1^2} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{c_1^2}{2gr} \right)^2 - 1} \quad \text{per} \quad \frac{c_1^2}{2gr} > 1 ,$$

si ha, in valore assoluto,

$$\psi_1 < 4c_1 r^2 \frac{1}{12} \frac{1}{\left(\frac{c_1^2}{2gr} \right)^2 - 1} < \frac{4c_1 r^2}{12} \left(\frac{2gr}{c_1^2} \right)^2 .$$

Dunque, l'approssimazione, alla quale è ricorso il prof. Cisotti, e che consiste nel ritenere nullo ψ_1, può ritenersi valida anche per l' efflusso ascendente, fintanto che sia $\frac{2gr}{c_1^2}$ quantità di 1° ordine, ossia *nel campo* *compreso fra l'orificio di efflusso, e la più elevata sezione orizzontale, nella quale la velocità media sia ancora abbastanza grande, rispetto alla caduta libera di un grave (nel vuoto) da una altezza eguale al raggio della sezione.*

2°. Essendo così dimostrato che la norma determinata dal Cisotti può essere applicata, qualunque sia il segno del termine $2gz$ (positivo nel moto discendente, negativo nel moto di ascesa), potrà anche essere senz'altro estesa a tutti quei moti, risultanti da efflussi di fluidi a volume specifico costante, ove la direzione delle forze che sollecitano, sia quella dell'asse di simmetria, e la loro natura sia definita dalla relazione

$$u^2 + v^2 = \mathrm{A}z + \text{cost.}$$

nella quale A è una costante, non importa se maggiore o minore dello zero.

Infatti, se si sostituisce la costante $2g$ colla costante A, la dimostrazione esposta vale ancora, ottenendo la condizione

$$\frac{\mathrm{A}r}{c_1^2} = \text{quantità di } 1^\circ \text{ ordine.}$$

Nell'efflusso di gas, la variazione totale di pressione è talora così piccola che è ammesso di ritenere costante il volume specifico, e, d'altra parte, nullo l'effetto del peso. La legge dell'efflusso, è, in queste condizioni,

$$u^2 + v^2 = 2gv_0(p_1 - p_2) + \text{cost}$$

$v_0 =$ volume specifico

p_1, e, $p_2 =$ pressione iniziale, e pressione finale.

Se la variazione $p_1 - p_2$ varia linearmente collo z, quella legge rientra nella forma

$$u^2 + v^2 = \mathrm{A}z + \text{Cost.}$$

Si potrà, perciò, determinare il profilo della vena, e quindi dell'effusore che la deve contenere, colla condizione della variazione lineare di pressione; e, coll'ipotesi semplice della velocità costante in ogni sezione piana normale all'asse di simmetria, solo per tutta quella parte di vena, in cui sia soddisfatta la condizione

$$\frac{\mathrm{A}r}{c_1^2} = \text{quantità di } 1^\circ \text{ ordine.}$$

3°. Se la vena effluente, sempre simmetrica rispetto ad un asse Oz, di direzione qualsiasi, può essere idealmente divisa con piani normali all'asse Oz, in strati o campi successivi e contigui, ed in ciascuno di questi la funzione

$(u^2 + v^2)$ possa definirsi lineare rispetto a z $(\mathrm{A}z + \text{cost.})$, con legge diversa da strato a strato, ma non discontinua, l'approssimazione del Cisotti sarà valida per una serie di campi successivi, se, in ciascuno di essi, la condizione

$$\frac{\mathrm{A}r}{c_1^2} = \text{quantità di } 1^\circ \text{ ordine}$$

risulti soddisfatta.

Se ora si conviene che l'estensione Δz di ciascun campo diventi sempre più piccola, e si vada al limite per Δz tendente allo zero, ed il numero dei campi all'infinito, si potrà concludere:

quando la legge del moto è

$$u^2 + v^2 = f(z) + \text{cost},$$

l'approssimazione del Cisotti è valida per tutta quella parte della vena nella quale sia soddisfatta la condizione

$$\frac{r\,f'(z)}{c_1^2} = \text{quantità di } 1^\circ \text{ ordine.}$$

La condizione dimostrata dal prof. Cisotti, per l'efflusso di un liquido pesante da un orificio circolare, è dunque un caso particolare, di una legge più generale, la quale può essere così enunciata:

quando, in vene fluenti, le forze che sollecitano il fluido siano parallele all'asse della vena, ed uniformi nel piano di una sezione normale all'asse, e si possa ritenere costante il volume specifico,

è consentito supporre uniforme la velocità nei punti di una medesima sezione piana normale all'asse, quando detta velocità media in questa sezione sia abbastanza grande, rispetto alla velocità che, per l'effetto delle medesime forze partendo dalla quiete, e, da quella sezione, acquisterebbe, su uno spazio eguale al raggio della sezione.

Nello studio delle vene fluenti, nelle macchine idrauliche, il calcolo, generalmente, ammette l'ipotesi della velocità uniforme in una sezione. Quanto ho esposto in questa Nota, dimostra che l'approssimazione ottenuta con quella ipotesi non è valida: quando rispetto al valore della velocità media di una sezione, non sia trascurabile, la corrispondente variazione di velocità sull'asse della vena in uno spazio eguale alla massima dimensione della sezione.