ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Sopra l'equilibrio astatico e sull'equivalenza di due sistemi astatici.* Nota di Matteo Bottasso, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Möbius, nel suo *Lehrbuch der Statik* (1), studiando le rette che ha chiamato assi di equilibrio, dimostra che se un corpo soggetto ad un sistema astatico di forze (2), ha due assi d'equilibrio, non paralleli, risulta pure tale ogni altro asse appartenente alla giacitura individuata dai due primi. Onde, se nel corpo esistono tre assi d'equilibrio non paralleli ad uno stesso piano, ogni retta è allora un'asse d'equilibrio. Di qui deduce che: *se un corpo rigido, soggetto ad un sistema astatico di forze, è in equilibrio in quattro diverse posizioni, esso risulta in generale in equilibrio in ogni altra posizione*, cioè sussiste allora l'*equilibrio astatico*.

Darboux (3), avendo dimostrato che se un corpo rigido, soggetto ad un sistema astatico di forze, è in equilibrio in una sua posizione determinata, esso è pure in equilibrio in altre tre (almeno) posizioni distinte dalla prima, ne indusse, a ragione, l'*inesattezza del teorema di Möbius*, ora ricordato (4).

Partendo però dalle condizioni di equilibrio astatico, da me espresse sotto forma assoluta in un volumetto in corso di stampa (5), si può dare

(1) Leipzig 1837, § 134; oppure *Gesammelte Werke*, III Bd., Leipzig 1886, pag. 198.

(2) Tale, cioè, che i vettori delle forze applicate ai singoli punti del corpo non variano quando il corpo subisce uno spostamento arbitrario, del quale basta tener conto della sola rotazione, astraendo dalle traslazioni. In altro modo si può supporre che il corpo rimanga fisso e che i vettori delle singole forze subiscano la stessa rotazione, cioè che le forze ruotino intorno ai loro punti d'applicazione in modo da conservar sempre fra esse gli stessi angoli. Per le citazioni bibliografiche sull'astatica, si veda l' « Astatique » (di prossima pubblicazione) sottoindicata; ovvero A. Del Re, *L'astatica e le sue rappresentazioni prospettiche*, Rend. R. Accad. di Napoli (3a), XII (1906): ed anche F. de Vasconcellos, *Sur la rotation des forces autour de leurs points d'application*, etc., Ann. da Acad. Polyt. do Porto, VII (1912).

(3) G. Darboux, *Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes* etc. Mém. della Société des sciences phys. et nat. de Bordeaux (2a), II (1878), pp. 2 e 20.

(4) Partendo da una data posizione (attuale) del corpo, gli assi delle quattro rotazioni che permettono di passare alle dette quattro posizioni d'equilibrio (statico) sono gli *assi statici* studiati dallo Siacci nella sua importante Memoria: *Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile*, Mem. d. Soc. it. delle scienze (dei XL) (3), IV, 1882.

(5) M. Bottasso, *Analyse vectorielle générale*, t. IV, *Astatique*, Mattei e C., Pavia 1915. Nel seguito indicherò, per brevità, questo volume con *Astat.*, oppure con *A. V. t. IV*, richiamando del pari i precedenti volumi della stessa Collezione con *A. V.* seguito dal numero del volume stesso.

al teorema di Möbius, come mostrerò in questa Nota, un enunciato *preciso* e *più espressivo*, in quanto basta considerare tre posizioni di equilibrio. Precisamente si ha:

Se un corpo rigido, a cui sia applicato un sistema astatico di forze, è in equilibrio (statico) in tre posizioni distinte, e tali che gli assi delle tre rotazioni, le quali permettono di passare dall'una all'altra delle tre posizioni indicate, non siano paralleli ad uno stesso piano, e le ampiezze delle stesse rotazioni non siano eguali a dei multipli di mezzo giro, il corpo sarà in equilibrio (statico) in ogni altra posizione: cioè si avrà allora l'equilibrio astatico.

Di qui si potrà pure dedurre, in particolare, un'analoga condizione per l'equivalenza (astatica) di due diversi sistemi astatici di forze applicati ad uno stesso corpo rigido. Si avrà, così, che *se due tali sistemi sono staticamente equivalenti in tre differenti posizioni del corpo, essi saranno astaticamente equivalenti (cioè equivalenti staticamente in ogni altra posizione del corpo), purchè le rotazioni, che permettono di passare dall'una all'altra delle tre posizioni indicate, non siano di mezzo giro e non abbiano i loro assi paralleli ad uno stesso piano.*

Una siffatta condizione d'equivalenza astatica, dedotta dall'equivalenza in tre diverse posizioni, era stata enunciata dal Da Silva [1] per due sistemi astatici, in ognuno dei quali la somma *dei vettori* delle forze fosse nulla (systemas de binarios gyrantes) e senza però dire esplicitamente a quali restrizioni dovessero soddisfare le dette tre posizioni.

Equilibrio astatico.

1. Supponiamo, dunque, che ogni punto P_i d'un corpo rigido sia sollecitato, in ogni posizione del corpo, da una forza di vettore $\mathbf{f}_i$ (che per alcuni punti del corpo può essere nullo), e questo vettore rimanga invariabile allo spostarsi del corpo. Un siffatto sistema deve quindi riguardarsi come insieme delle coppie $(P_i, \mathbf{f}_i)$, e si ha una sua *configurazione* quando si considera una data posizione del corpo e dei vettori delle forze.

Nello studio di questo sistema ha importanza fondamentale la considerazione dell'omografia vettoriale

$$\sigma_A = \Sigma_i \, \mathrm{H}(P_i - A, \mathbf{f}_i), \tag{1}$$

funzione, oltrechè della configurazione considerata del sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$, anche del punto A (*origine* dell'omografia σ_A).

[1] D. A. Da Silva, *Memoria sobre a rotação das forças em torno dos pontos d'applicação*, Mem. da Acad. real das sciencias de Lisboa (2ª), tomo III, parte I (1851), pag. 217, n. 188.

Partendo da ciò, ho dimostrato (*Astat.*, pag. 10) che, *affinchè un dato sistema* (P_i, $\mathbf{f}_i$) *sia in equilibrio astatico, è necessario e sufficiente che siano identicamente nulle*:

1°) *la somma dei vettori delle forze applicate ai punti del corpo, cioè il vettore*

$$\Sigma_i \mathbf{f}_i = \mathbf{f},$$

che ho chiamato « il vettore del sistema astatico »;

2°) *l'omografia* σ_A *relativa ad un punto qualsiasi* A, *invariabilmente legato al corpo*; cioè, *perchè sussista l'equilibrio astatico, occorre e basta che si abbia*:

(2) $$\mathbf{f} = 0 \quad , \quad \sigma_A = 0 ,$$

essendo A *un punto arbitrariamente fissato.*

2. Ciò premesso, ammettiamo che in una data configurazione il sistema (P_i, $\mathbf{f}_i$) sia staticamente in equilibrio, cioè che la formazione di 2ª specie di Grassmann-Peano,

$$s = \Sigma_i P_i \mathbf{f}_i ,$$

o *forza motrice* del sistema statico di forze [e rappresentante in modo completo il *wrench* di R. S. Ball (1)], sia identicamente nulla.

Tale forza motrice può facilmente mettersi sotto la forma (*Astat.*, pag. 7 [8])

$$s = A\mathbf{f} + |\,\mathrm{V}\sigma_A ,$$

cioè s è la somma del bipunto $A\mathbf{f}$ con l'indice (di Grassmann) del vettore, $\mathrm{V}\sigma_A$, dell'omografia del sistema relativa al punto A stesso; e perchè sia nulla (2) occorre e basta che sia nullo il suo vettore $\mathbf{f}$ ed il bivettore $|\mathrm{V}\sigma_A$, ossia, dev'essere:

(3) $$\mathbf{f} = 0 \quad , \quad \mathrm{V}\sigma_A = 0 .$$

Così la prima delle condizioni (2) è verificata (nella configurazione data, e quindi in ogni altra configurazione del sistema); ed inoltre si ha che, nella configurazione considerata, l'omografia σ_A è una dilatazione (*A. V.*, I, pag. 25 [1]).

3. Supponiamo, ora, che l'equilibrio statico del sistema di forze sussista pure dopo che, partendo dalla precedente configurazione d'equilibrio, si siano assoggettati i vettori delle forze ad una rotazione ϱ (od isomeria ad inva-

(1) R. S. Ball, *A treatise on the theory of screws*, 2d edit., Cambridge, 1900.

(2) Ved., per es., C. Burali-Forti, *Corso di geometria analitico-proiettiva per gli allievi della R. Accademia militare*, G. B. Petrini, Torino 1912, pag. 2.

riante terzo positivo: *A. V.*, I, pag. 50), d'ampiezza θ, ed asse il vettore unitario $\mathbf{u}$, espressa quindi da

$$\varrho = \varrho(\theta\,,\mathbf{u}) = \cos\theta + (1-\cos\theta)\,\mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathbf{u}) + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}\wedge\,, \tag{4}$$

la quale, com'è ovvio (*Astat.*, pag. 7 [12]), trasforma l'omografia (1), relativa al punto A, nella nuova omografia $\sigma'_A = \varrho\sigma_A$. E poichè, per il n. 2, il vettore di questa omografia deve ancora essere nullo, dovrà essere, per le (3) e (4) (*A. V.*, I, pag. 43 [2]; pag. 25 [3]; pag. 28 [3]; pag. 42 [2])],

$$2\mathrm{V}(\varrho\sigma_A) = (1-\cos\theta)\,(\sigma_A\mathbf{u})\wedge\mathbf{u} + \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{C}\sigma_A\mathbf{u} = 0\,. \tag{5}$$

Se indichiamo con $h\mathbf{u}$, essendo h un numero reale, la componente del vettore $\sigma_A\mathbf{u}$ secondo l'asse della rotazione ϱ, e con $k\mathbf{v}$, essendo k un numero reale e $\mathbf{v}$ un vettore unitario perpendicolare ad $\mathbf{u}$, la componente normale ad $\mathbf{u}$ dello stesso vettore $\sigma_A\mathbf{u}$, si ha (*A. V.*, I, pag. 23 [5]):

$$\sigma_A\mathbf{u} = h\mathbf{u} + k\mathbf{v}\;,\;(\sigma_A\mathbf{u})\wedge\mathbf{u} = k\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\quad,\quad \mathrm{C}\sigma_A\mathbf{u} = (\mathrm{I}_1\sigma_A - h)\,\mathbf{u} - k\mathbf{v}\,,$$

e l'equazione (5) diventa:

$$k(1-\cos\theta)\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{u} + \operatorname{sen}\theta\,[(\mathrm{I}_1\sigma_A - h)\,\mathbf{u} - k\mathbf{v}] = 0\,. \tag{5'}$$

Poichè $\mathbf{u}\,,\mathbf{v}\,,\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}$ formano una terna unitario-ortogonale (sinistrorsa) di vettori, affinchè l'equazione (5') sia verificata occorre e basta che siano soddisfatte le relazioni:

$$k(1-\cos\theta) = 0\quad,\quad k\operatorname{sen}\theta = 0\quad,\quad \operatorname{sen}\theta(\mathrm{I}_1\sigma_A - h) = 0\,. \tag{5''}$$

Le prime due relazioni (come si vede subito, quadrando e sommando) sono solamente verificate per $k=0$, oppure per θ eguale ad un numero intero di 2π, cioè di giri; e poichè nell'ultima ipotesi la seconda configurazione d'equilibrio coinciderebbe con la prima, mentre, per dato, le due configurazioni sono distinte, dovrà essere necessariamente $k=0$. e quindi $\sigma_A\mathbf{u} = h\mathbf{u}$. Similmente, perchè sia verificata l'ultima delle (5'') occorre che $\mathrm{I}_1\sigma_A = h$, poichè è $\sin\theta \neq 0$, avendo escluso, nella condizione d'equilibrio astatico da dimostrare, che θ sia un multiplo di π, cioè di semi-giri.

Ne deduciamo così:

$$\mathrm{C}\sigma_A\mathbf{u} = \mathrm{I}_1\sigma_A\,.\,\mathbf{u} - \sigma_A\mathbf{u} = 0\,,$$

cioè che $\mathbf{u}$ è parallelo ad una direzione nulla (*A. V.*, I, pag. 12) dell'omografia $\mathrm{C}\sigma_A$.

4. Facciamo ancora l'ipotesi che l'equilibrio statico del sistema di forze sussista in una terza configurazione, ottenuta applicando ai vettori delle forze, a partire dalla prima configurazione, una rotazione $\varrho_1 = \varrho_1(\theta_1\,,\mathbf{u}_1)$ di ampiezza θ_1, non multipla di un semi-giro, e di asse il vettore unitario $\mathbf{u}_1$, non parallelo ad $\mathbf{u}$.

Procedendo come nel n. 3, si concluderà che anche la direzione del vettore $\mathbf{u}_1$ dev'essere nulla per $C\sigma_A$; ed essendo distinte tali due direzioni nulle, l'omografia $C\sigma_A$ risulta doppiamente singolare (*A. V.*, I, pag. 12), e perciò è una diade. Poichè, d'altra parte (*A. V.*, I, pag. 23 [5]), $C\sigma_A$ al pari di σ_A (n. 2), è una dilatazione, potrà scriversi:

$$C\sigma_A = 2p\mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

essendo p un numero reale, e $\mathbf{v}$ un vettore unitario normale ad $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{u}_1$; se ne trae $\mathrm{I}_1(C\sigma_A) = 2p = 2\mathrm{I}_1\sigma_A$, e quindi:

$$\sigma_A = p - 2p\mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \tag{6}$$

5. Consideriamo infine la rotazione $\varrho_0(\theta_0, \mathbf{u}_0)$, che è necessario applicare ai vettori delle forze a partire dalla seconda configurazione, per ottenere la terza delle configurazioni di equilibrio dianzi esaminate. È ovviamente $\varrho_0 = \varrho_1\varrho^{-1}$, od anche (*A. V.*, I, pag. 48 [3]) $\varrho_0 = \varrho_1\mathrm{K}\varrho$; ed il vettore (asse) $\mathbf{u}_0$, e l'ampiezza θ_0 di questa rotazione possono ad esempio ottenersi con una nota costruzione geometrica, molto semplice, partendo dai vettori $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1$, e dalle ampiezze θ, θ_1 che supporremo — com'è lecito — positive e minori di 2π, cioè d'un giro.

Precisamente [1], sulla sfera di raggio unitario e centro il punto arbitrario O, il triangolo sferico di vertici:

$$U = O - \mathbf{u} \quad , \quad U_1 = O + \mathbf{u}_1 , \quad U_0 = O - \mathbf{u}_0 ,$$

tale che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_0 < 0$, ha i suoi angoli in U, U_1 ed U_0 rispettivamente eguali ad $\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2}\theta_1$ ed $\frac{1}{2}\theta_0$. Nel nostro caso tale triangolo non può avere due lati retti, poichè, in caso contrario, sarebbe pure rettangolo, contrariamente all'ipotesi fatta sulle ampiezze delle tre rotazioni; quindi, dei due lati U_1U_0, U_0U, almeno uno, per es. l'ultimo, non è retto.

Ciò premesso, considerando l'omografia [n. 3 e (6)]

$$\sigma'_A = \varrho\sigma_A = p\varrho - 2p\mathrm{H}(\mathbf{v}, \varrho\mathbf{v}) \tag{7}$$

del sistema nella seconda configurazione e relativa al punto A, dopo quanto si è detto nel n. 3, poichè $\sigma''_A = \varrho_0\sigma'_A$ è l'omografia del sistema nella terza configurazione d'equilibrio, si avrà $C\sigma'_A\mathbf{u}_0 = 0$; ed essendo, per le (4) e (7) (*A. V.*, I, pag. 28 [2]), e poichè $\mathbf{v}$ è normale ad $\mathbf{u}$,

$$\mathrm{I}_1\sigma'_A = p\mathrm{I}_1\varrho - 2p\mathbf{v} \times \varrho\mathbf{v} = p(1 + 2\cos\theta) - 2p\cos\theta = p ,$$

[1] Cfr., per es., C. Burali-Forti, *Isomerie vettoriali e moti geometrici*, Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino (2°), vol. XLV (1914-15), § III, n. 11, ove si troverà anche l'espressione del vettore $\mathbf{u}_0$ e dell'angolo θ_0 della rotazione prodotto di ϱ^{-1} per ϱ_1.

dovrà essere:

$$pu_0 - p\varrho u_0 + 2p\mathbf{v}\times \mathbf{u}_0 \, . \, \varrho\mathbf{v} = 0 . \tag{8}$$

Ora si osservi che il vettore $\varrho\mathbf{u}_0$ è simmetrico di $\mathbf{u}_0 = U_0 - O$, rispetto al piano OUU_1, epperò (sulla sfera unitaria di centro O) il meridiano passante per i punti U_0 ed $U'_0 = O + \varrho\mathbf{u}_0$ è normale al meridiano UU_1, e passa quindi per il punto $V = O + \mathbf{v}$, che sulla sfera considerata è uno dei poli del meridiano UU_1 (poichè $\mathbf{v}$ è normale ad $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{u}_1$). Perciò il punto $V' = O + \varrho\mathbf{v}$ (ottenuto facendo rotare, sulla detta sfera. il punto V intorno al polo U dell'angolo θ, non nullo e minore di 2π), non essendo l'arco UU_0 eguale ad un quadrante, non potrà appartenere al meridiano di U_0 ed U'_0: cioè i tre vettori $\mathbf{u}_0$, $\varrho\mathbf{u}_0$, $\varrho\mathbf{v}$ non sono complanari. Quindi, affinchè sia verificata la (8), occorre sia $p = 0$: cioè, per la (6), $\sigma_A = 0$; e così risulta verificata anche la seconda delle condizioni (2), ed il nostro sistema è effettivamente in equilibrio astatico. c. d. d.

Equivalenza astatica.

6. La condizione enunciata per l'equivalenza astatica di due sistemi $(P_i, \mathbf{f}_i)$, $(P_i, \mathbf{f}'_i)$; applicati ad uno stesso corpo rigido, si può dimostrare con un procedimento affatto analogo a quello ora esposto per l'equilibrio astatico, partendo dalle condizioni necessarie e sufficienti per tale equivalenza, che si riassumono (*Astat.*, pag. 9, n. 14) nell'eguaglianza dei due vettori e delle due omografie (relative ad uno stesso punto) dei sistemi considerati.

Del resto, perchè sussista l'equivalenza astatica dei due sistemi dati, occorre e basta che il sistema, ottenuto applicando ad ogni punto P_i del corpo la forza di vettore $\mathbf{f}_i - \mathbf{f}'_i$, sia in equilibrio astatico. Di qui segue che la data condizione d'equivalenza può riguardarsi come corollario di quella, da noi dimostrata, per l'equilibrio astatico.