ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Meccanica. — *Nuovi tipi di onde periodiche permanenti e rotazionali.* Nota I di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Si consideri un canale scoverto, a fondo orizzontale e a sponde verticali, in regime permanente. Il moto della corrente abbia luogo per piani verticali paralleli tra loro ed alle sponde, essendo i caratteri del movimento identici per tutti i punti situati sopra una stessa perpendicolare alle sponde. Si è così condotti a considerare i caratteri del moto in una generica sezione verticale del canale, parallela alle sponde.

Si assuma, in questa sezione piana, una coppia di assi O, xy, coll'asse delle ascisse coincidente col fondo e diretto nel senso generale della corrente; l'asse delle ordinate sia verticale ascendente.

Il moto avviene nella parte indefinita di piano — identica, dal punto di vista dell'*analysis situs*, ad una striscia compresa tra due rette parallele — compresa tra il fondo del canale $y = 0$ e un pelo libero λ, di forma *a priori* incognita.

Sieno, al solito: u e v le componenti della velocità, p il valore assoluto della pressione specifica, g l'accelerazione di gravità.

Assumiamo $= 1$ la densità costante del liquido.

Se si pone

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}\ ,\quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\ , \tag{1}$$

dove $\psi(x\,,y)$ — funzione di corrente di Stokes — è integrale della equazione

$$\underset{2}{\Delta}\psi = \dot{\mathrm{F}}(\psi)\ , \tag{2}$$

con F funzione arbitraria di ψ e $\dot{\mathrm{F}} = \frac{d\mathrm{F}}{d\psi}$, è noto che le (1) permettono di riassumere le tre equazioni idrodinamiche di Eulero nell'unica seguente [1]:

$$p = \mathrm{F}(\psi) - gy - \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2 . \tag{3}$$

[1] Cfr., ad es., Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge, University Press, 1906, pag. 230); ed ancora Cisotti, *Sopra le correnti liquide spontanee* (questi Rendiconti, 1910, vol. XIX, pag. 11).

Questa definisce la pressione, nota la ψ. La (2), o, più precisamente, la

$$r = -\frac{1}{2}\Delta\psi = -\frac{1}{2}\dot{F},$$

definisce la distribuzione dei vortici.

Le condizioni al contorno consistono nell'esprimere che:

a) tanto il fondo $y = 0$ del canale, quanto il pelo libero λ, sono linee di flusso;

b) su λ dev'essere $p = p_0$, se p_0 designa la pressione atmosferica, che si suppone costante.

Alla condizione *a*) si soddisfa, com'è ben noto, imponendo alla ψ di assumere, per $y = 0$ e sopra λ, valori costanti differenti; poniamo, così,

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi = 0 & \text{su} \quad y = 0\,, \\ \psi = q & \text{sopra} \quad \lambda\,, \end{cases}$$

per cui q rappresenta la *portata* della corrente.

In quanto alla condizione *b*), tenuto conto dell'ultima delle precedenti, essa si traduce analiticamente nel modo seguente:

$$(5) \qquad \left(\Delta_1\psi\right)^2 + 2gy = \text{costante sopra } \lambda\,.$$

La questione analitica generale consiste adunque nella ricerca di una linea libera λ e di una funzione $\psi(x\,,y)$, regolare nella striscia accennata, soddisfacente alla (2) e alle (4) e (5).

2. Se fosse $\dot{F}(\psi) = 0$, il moto della corrente sarebbe irrotazionale.

In tal caso la questione è stata già posta ed ampiamente discussa ([1]); ma soltanto per soluzioni approssimate (onde sinusoidali e onda solitaria ([2])), si posseggono risultati definitivi.

Il caso più semplice di moto con vortici sarebbe quello che corrisponde ad una uniforme distribuzione di vortici, cioè $\dot{F}(\psi) =$ costante.

([1]) Cfr. Levi-Civita, *Sulle onde progressive di tipo permanente* (questi Rendiconti, 1907, vol. XVI, pp. 777-790).

([2]) Cfr. Lamb, loc. cit., pag. 398. Una piccola modificazione nella determinazione della costante che compare nel secondo membro della (5) ha permesso a Korteweg e de Vries di mettere in luce un nuovo tipo di profili di onde periodiche irrotazionali, che gli Autori hanno denominato « cnoidali » [Cfr. Nota II, n. 6]. È interessante la circostanza che l'equazione differenziale corrispondente è dello stesso tipo della (15) che troveremo in seguito. La diversità di segno di una delle costanti conduce però a differenti integrali, e quindi a distinte forme del pelo libero.

Ma è facile il vedere che la trattazione di questo caso può farsi dipendere dal problema irrotazionale, precedentemente accennato [1].

Il più semplice caso, diremo così, irriducibile di moto vorticoso, si ha quando si suppone $\dot{F}(\psi)$ lineare nella ψ, ovvero addirittura (a meno di una inessenziale costante additiva e di un fattore costante, pure inessenziale) $\dot{F}(\psi) = \psi$.

Allora la (2) diviene

$$\underset{2}{\Delta}\psi = \psi \,. \tag{6}$$

Su questo caso desidero soffermarmi [2].

3. Poniamo

$$\psi = \sum_0^\infty {}_n \frac{a_n}{n!} y^n \,, \tag{7}$$

essendo a_n funzioni di x tali da assicurare la convergenza uniforme della ψ e delle sue derivate, termine a termine, fino al second'ordine, per tutti valori di x e di y che si avrà bisogno di considerare.

La (7) soddisfa alla (6), nonchè alla prima delle condizioni (4), prendendo

$$\begin{cases} a_{2n} = 0 \,, \\ a_{2n+1} = \displaystyle\sum_0^n {}_i (-1)^i \binom{n}{i} \frac{d^{2i} a_1}{dx^{2i}} \,, \end{cases} \tag{8}$$

con che la (7) diviene

$$\psi = \sum_0^\infty {}_n \frac{a_{2n+1}}{\underline{|2n+1}} y^{2n+1} \,, \tag{9}$$

qualunque sia la funzione $a_1(x)$, dalla quale dipendono, a norma della seconda delle (8), i coefficienti a_{2n+1} [3].

Poichè, come risulta dalla (9), è

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = a_1 \quad \text{per} \quad y = 0 \,,$$

[1] Un caso approssimato si può vedere nella recente Nota: *Sulle onde semplici di tipo permanente e rotazionale* (Rend. R. Istituto lombardo, 1913, vol. XLVI, pag. 917 e seguenti; oppure Nuovo Cimento, aprile 1914, pag. 251).

[2] È ben manifesto che il caso che intraprendo a considerare non può essere implicitamente contenuto nelle onde rotazionali di Gerstner [Cfr. Lamb, loc. cit., pag. 395] inquantochè per quest'ultime la profondità del canale deve essere infinita, mentre le considerazioni che andrò facendo sono essenzialmente subordinate all'ipotesi opposta.

[3] Cfr. Cisotti, *Sulla equazione* $\underset{2}{\Delta}\psi = \psi$. Atti del R. Istituto veneto, 29 novembre 1914.

dalle (1) risulta che $a_1(x)$ definisce la velocità sul fondo del canale. Sistematizzando il criterio adoperato da lord Rayleigh nel problema dell'onda solitaria, e che ho avuto occasione di applicare in altre questioni [1], è facile di vedere che si può, in generale. determinare una linea libera λ e la funzione $a_1(x)$ in guisa che sieno soddisfatte tutte le volute condizioni di contorno (4) e (5). Infatti, esprimendo la seconda delle (4) e la (5) mediante $a_1(x)$ e le sue derivate, a norma delle (9) e (8), si ottengono due relazioni cui devono soddisfare, sopra λ, la funzione $a_1(x)$ e le sue derivate. La eliminazione di $a_1(x)$ tra esse dà luogo ad una relazione tra x e y, che è l'equazione del pelo libero λ. Una volta stabilita l'equazione di λ, la eliminazione di y tra essa e la seconda delle (4) definisce la a_1 quale funzione di x.

4. La esecuzione effettiva di quanto ho ora indicato in generale, si compie agevolmente quando è lecito di trascurare, nello sviluppo (9) della ψ, i termini successivi al primo. Si ha allora:

$$\psi = a_1 y \,, \tag{10}$$

mentre la seconda delle (4) e la (5) divengono rispettivamente

$$\left\{\begin{aligned} & a_1 y = q \,, \\ & a_1^2 + \dot{a}_1^2 y^2 + 2gy = \frac{q^2}{h^2} + 2gh \,, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

avendo chiamato $\frac{q^2}{h^2} + 2\,gh$ la costante del secondo membro della (5), con h arbitraria. La prima delle precedenti, risoluta rispetto ad y, diviene

$$a_1 = \frac{q}{y} \,, \quad \text{sopra} \quad \lambda \,; \tag{12}$$

e, derivando,

$$\dot{a}_1 = -\,q\,\frac{\dot{y}}{y^2} \,, \tag{13}$$

avendo designato con $\dot{y}$ la derivata di y rispetto ad x, sopra la incognita curva λ.

[1] Cfr. Cisotti, *Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso* (questi Rendiconti, vol. XX, 1911, pag. 633; oppure Zeitschrift für Math. und Phys., B 61, an. 1912, pag. 76); e ancora, *Sopra l'efflusso a stramazzo*, questi Rendiconti, vol. XXI, 1912, pag. 97; e ancora *Sull'efflusso di un liquido pesante da un orificio circolare*, questi Rendiconti, vol. XXIII, 1914, pag. 324.

Ponendo

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\varrho &= \frac{q^3}{g h^3}\,,\\
k &= \frac{1}{4}\,\varrho \left\{ \sqrt{1+\frac{8}{\varrho}} + 1 \right\},\\
k' &= \frac{1}{4}\,\varrho \left\{ \sqrt{1+\frac{8}{\varrho}} - 1 \right\} = k - \frac{1}{2}\,\varrho\,,\\
\eta &= \frac{y}{h}\;,\quad \xi = \frac{x}{h}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

la eliminazione di a'_1 e a_1 dalla seconda delle (11), per mezzo delle (12) e (13), dà luogo alla seguente equazione differenziale che caratterizza il pelo libero λ:

$$
(15)\qquad \dot{\eta}^2 = \frac{2}{\varrho}\,(\eta - 1)\,(k - \eta)\,(\eta + k')\,,
$$

designando ora il punto derivazione rispetto a ξ.

5. Derivando la precedente rispetto a ξ, e dividendo per $2\,\dot{\eta}$, si ha:

$$
(16)\qquad \ddot{\eta} = \frac{1}{\varrho}\left\{ (k-\eta)\,(\eta+k') - (\eta-1)\,(\eta+k') + (\eta-1)\,(k-\eta) \right\}.
$$

Supposto $h > 0$, e tenendo presente che nella regione, ove deve svolgersi il moto, è $y \geq 0$, dalle (14) scende che ϱ, k, k' ed η non sono mai negativi. Ciò posto dalla (15) scende che $\dot{\eta}$ si annulla per i valori 1 e k di η, e soltanto per essi; mentre dalla (16) scende

$$
\ddot{\eta} = \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho}\,(k-1)\,(1+k') \quad \text{per} \quad \eta = 1\,,\\
&\frac{1}{\varrho}\,(1-k)\,(1+k') \quad \text{per} \quad \eta = k\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Si può dunque concludere che, se è $k > 1$, la funzione η assume un valore massimo k ed un valore minimo 1; e, viceversa, se $k < 1$, la η assume un massimo $= 1$ ed un minimo $= k$; in ogni caso l'oscillazione di y è $|k-1|$.

È facile ora constatare che è $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$, secondochè $\varrho < 1$, $\varrho = 1$, $\varrho > 1$. Che sia $k = 1$ per $\varrho = 1$, lo si verifica facilmente sulla seconda delle (14). Facciamo ora vedere che k è crescente con ϱ. Infatti, derivando la seconda delle (14), si ha:

$$
\frac{dk}{d\varrho} = \frac{1}{4} + \frac{4+\varrho}{4\varrho\sqrt{1+\dfrac{8}{\varrho}}} > 0\,.
$$

Essendo dunque k crescente con ϱ, eguale all'unità insieme con ϱ, sarà pure $k < 1$, se $\varrho < 1$ e $k > 1$ se $\varrho > 1$; c. d. d.

Dalla seconda delle (14) si ricava pure, senza difficoltà, che

$$\left\{\begin{array}{lll} k < \varrho & \text{se} & \varrho > 1 , \\ k > \varrho & \text{se} & \varrho < 1 . \end{array}\right. \tag{17}$$

Notiamo, infine, che, dovendo essere positivo o nullo il secondo membro della (15), il caso $\varrho = 1$ comporterebbe l'unica soluzione $\eta = 1$, ossia $y = h$: il pelo libero λ sarebbe una retta parallela al fondo; caso notoriamente privo di interesse. Restano allora da considerare i due casi $\varrho > 1$ e $\varrho < 1$, nel primo dei quali dovrà essere $1 \leq \eta \leq k$, e, nel secondo, $k \leq \eta \leq 1$.

Ciò posto, bisognerebbe procedere alla integrazione della (15). Ciò che, per la ristrettezza dello spazio concesso alle comunicazioni accademiche, sono costretto di rimandare ad una Nota successiva.

Matematica. — *Sopra una relazione fra gli elementi fondamentali di due varietà algebriche a tre dimensioni in corrispondenza birazionale.* Nota di M. PANNELLI, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

In una Nota inserita nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei dell'anno 1912, con il titolo: *Sopra una nuova proprietà delle trasformazioni birazionali dello spazio ordinario*, io ho dimostrato il teorema seguente:

« Se fra i punti di due spazi ordinarî S ed S' ha luogo una corrispondenza birazionale, gli elementi fondamentali di questa corrispondenza sono legati tra loro dalla relazione:

$$\sigma + \tau - \sum_k \varrho_k = \sigma' + \tau' - \sum_{k'} \varrho'_{k'} , \tag{1}$$

nella quale σ e τ indicano rispettivamente i numeri dei punti P_l e delle curve C_k fondamentali dello spazio S, e ϱ_k $(k = 1, 2, 3, \dots, \tau)$ è il genere di una di queste curve; ed inoltre σ', τ' e $\varrho'_{k'}$ hanno i medesimi significati rispetto agli elementi fondamentali $P'_{l'}$ e $C'_{k'}$ dello spazio S' ».

Per la validità di questo teorema è necessario che gli elementi fondamentali di ciascuno dei due spazi siano multipli ordinari per le superficie costituenti il sistema omaloidico dello spazio stesso, e di più che il cono tangente ad una di queste superficie in un punto P_l (o $P'_{l'}$), come anche il gruppo dei piani che la toccano in un punto generico di una curva C_k