ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del **1914.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sur les cycles des surfaces algébriques et sur une définition topologique de l'invariant de Zuthen-Segre.* Nota di JAMES W. ALEXANDER II, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

1. Chaque variété algébrique V_n à n dimension [1] correspond à une variété de Riemann $R_{2(n)}$ réelle à $2n$ dimensions. Tout invariant topologique de celle-ci définit un invariant relatif de V_n, c'est-à-dire, un invariant vis-à-vis de toute transformation birationnelle qui établit une correspondance bi-univoque *sans exception* entre les point de V_n et les points de sa transformée. Nous démontrerons dans cette note qu'il existe un lien étroit entre l'invariant de Zeuthen-Segre I_n d'une variété algébrique V_n et un invariant topologique $\Pi_{2(n)}$ de la variété $R_{2(n)}$ attachée à V_n. En particulier, nous aboutirons par une voie très simple à la formule qui exprime le nombre des cycles à deux dimensions de la variété $R_{2(2)}$ attachée à une surface algébrique V_2.

Rappelons la manière dont on définit les invariants Π et I:

Soit R_k une variété réelle à k dimensions dont les nombres de connexion sont $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$. Si l'on subdivise la variété R_k en un polyèdre

[1] C'est-à-dire, une variété dont les éléments dépendent de n variables complexes.

généralisé quelconque à éléments simplement connexes, on a, d'après Poincaré,

(1) $$\Pi_k = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (P_i - 1) + (-1)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \alpha_i \text{ [1]}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ désignent le nombre des sommets, arêtes, faces, ..., éléments à k dimensions du polyèdre. D'autre part, soit V_n une variété algébrique. Alors, l'invariant de Zeuthen-Segre s'exprime, si $n = 2$, par la relation

(2) $$I_2 = \delta - m - 4\pi$$

et plus généralement par la relation

(2') $$I_n = \delta - 2I_{n-1} - I_{n-2},$$

I_{n-1} désignant l'invariant semblable appartenant à la variété générale d'un faisceau linéaire de variétés V_{n-1} tracées sur la V_n, I_{n-2}, l'invariant de la variété-base V_{n-2} du faisceau, et δ le nombre des variétés du faisceau douées d'un point double en dehors des points de la variété-base [2].

Entre l'invariant I_2 d'une surface algébrique V_2 et l'invariant $\Pi_{2(2)}$ de la variété $R_{2(2)}$ attachée à V_2, nous trouverons la relation

(3) $$\Pi_{2(2)} = I_2 + 4 \qquad [§ 2]$$

qui se généralise de la façon suivante:

(3') $$\Pi_{2(n)} = (-1)^n I_n + 2n. \qquad [§ 4]$$

La formule qui exprime le nombre des cycles à deux dimensions linéairement indépendants de la $R_{2(2)}$ attachée à une V_2 est la suivante:

(4) $$(P_2 - 1) = I_2 + 4(p_g - p_a) + 2 \text{ [3]}. \qquad [§ 5]$$

2. Considérons d'abord la variété $R'_{2(2)}$ attachée à un plan V'_2. La partie finie du plan est représentée sur $R'_{2(2)}$ par un élément à 4 dimensions E_4, la ligne à l'infini, par une variété fermée à deux dimensions qui devient un élément à 2 dimensions E_2 si on enlève un point E_0. On peut donc subdiviser la variété $R'_{2(2)}$ en un polyèdre généralisé ayant un sommet E_0, une face E_2, et un élément à 4 dimensions E_4, mais n'ayant pas d'éléments à 1 ni à 3 dimensions. Il s'en suit que, pour le plan:

(5) $$\Pi'_{2(2)} = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 3.$$

[1] Poincaré, *Analysis situs*, Journal de l'École Polytechnique, 1895.

[2] Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, Atti di Torino, 1896.

[3] Pour déduire cette formule, on peut omettre §§ 3 et 4.

Passons maintenant à une surface algébrique V_2 de degré plus élevé, mais ne possédant que des singularités ordinaires. En la projetant sur un plan d'un point arbitraire de l'espace, on obtient une variété à m feuillets qui se joignent deux-à-deux le long d'une courbe de diramation C. La courbe C aura en général un certain nombre de points de rebroussement appartenant à 3 feuillets. La variété de Riemann $R_{2(2)}$ attachée à V_2 se compose de m feuillets superposés sur une $R'_{2(2)}$. Ces feuillets se joignent le long d'une variété $R'_{2(1)}$ correspondant à la courbe d'embranchement. Subdivisons de nouveau la variété $R'_{2(2)}$ en un polyèdre généralisé P′, mais cette fois de façon que les points singuliers de $R_{2(1)}$ se trouvent parmi les sommets du polyèdre et que la $R_{2(1)}$ elle même se trouve composée d'éléments de dimensions 0, 1 et 2. En faisant la même subdivision sur chaque feuillet de la variété $R_{2(2)}$, on décompose celle-ci en un polyèdre P tel qu'à un élément de P′ correspondent en général m éléments de P.

Si à chaque élément de P correspondaient toujours m éléments distincts de P′, on calculerait l'invariant $\Pi_{2(2)}$ de $R_{2(2)}$ immédiatement, car on aurait d'après (5):

$$\Pi_{2(2)} = m\Pi'_{2(2)} = 3m\,.$$

Mais les sommets correspondant aux points de rebroussement de la courbe C appartiennent à 3 feuillets et les autres éléments de $R_{2(1)}$, à 2 feuillets; donc, il faut écrire

$$\Pi_{2(2)} = 3m - (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2) - r \tag{6}$$

où r désigne le nombre des points de rebroussement de C et α_0, α_1 et α_2, le nombre des sommets, arêtes et faces de $R_{2(1)}$.

Désignons l'ordre de la courbe de diramation par n', son genre par p, sa classe par δ, et le nombre de ses points doubles par d. Alors

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p$$

$$p = \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - d - r$$

et

$$\delta = n'(n'-1) - 2d - 3r,$$

d'où l'on obtient

$$\Pi_{2(2)} = 3m - 2n' + \delta\,. \tag{7}$$

Mais en désignant le genre d'une section plane de la surface par π, on a

$$2 - 2\pi = 2m - n'$$

puisqu'à cette courbe correspondra une surface de Riemann à m feuillets. et n' points d'embranchement.

Donc, finalement,

$$\Pi_{2(2)} = \delta - m - 4\pi + 4$$

$$= \mathrm{I}_2 + 4 . \tag{3}$$

3. On pourrait sans doute étendre la démonstration précédente aux variétés algébriques V_n à dimensions supérieures, mais il faudrait examiner les singularités de la variété de diramation lorsqu'on projette la variété V_n sur un hyper-plan. Nous donnerons une autre démonstration de (3) qui se généralisera immédiatement.

Considérons sur une surface algébrique V_2 un faisceau linéaire de courbes $C_1 + \lambda C_2$ passant par m points-base. Pour une valeur générale du paramètre λ, on aura une courbe du faisceau de genre π, mais pour δ valeurs particulières, $a_1, a_2, \ldots, a_\delta$, le genre de la courbe s'abaissera. Nous représenterons les valeurs réelles et imaginaires de λ sur une sphère de Riemann S_2, sur laquelle nous tracerons un système de coupures $b_1, b_2, \ldots, b_{\delta-1}$ allant du point a_δ aux points $a_1, a_2, \ldots, a_{\delta-1}$. Ces coupures réduiront la sphère S_2 à un élément simplement connexe c à 2 dimensions.

On peut regarder la variété de Riemann $R_{2(2)}$ attachée à la surface V_2 comme engendrée par la variété $R_{2(1)}$ attachée à une courbe du faisceau $C_1 + \lambda C_2$. La variété $R_{2(2)}$ comprend donc:

1) m points correspondant aux pounts-base du faisceau $C_1 + \lambda C_2$. Ces points appartiennent à toutes les variétés $R_{2(1)}$.

2) δ variétés à 2 dimensions qui ne sont autres que les variétés $R_{2(1)}$ (moins les points-base que nous avons déjà comptés) correspondant aux valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_\delta$ de λ. Ces variétés auront un point singulier en dehors des points-base. Nous devons le compter comme un *seul point* puisque ce n'est pas un point singulier de la variété $R_{2(2)}$.

3) $\delta - 1$ variétés à 3 dimensions engendrées par les variétés $R_{2(1)}$ (moins les points-base) lorsque λ varie le long des $\delta - 1$ lignes $b_1, b_2, \ldots, b_{\delta-1}$.

4) Une variété à 4 dimensions engendrée par les variétés $R_{2(1)}$ (moins les points-base) lorsque λ varie sur la face c.

Nous calculerons l'invariant de Poincaré pour 1), 2), 3) et 4) séparément. La somme de ces nombres sera l'invariant $\Pi_{2(2)}$ de $R_{2(2)}$:

$$\Pi_{2(2)} = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \Pi^{(4)} . \tag{8}$$

Calculons d'abord $\Pi^{(4)}$. Nous prenons une $R_{2(1)}$ correspondant à une valeur λ du paramètre et nous la subdivisons en un polyèdre P qui comprend les m points-base parmi ses sommets. Pour ce polyèdre, le théorème d'Euler nous donne

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2\pi ,$$

ou plutôt, puisque nous excluons les points-base,

(9) $$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2\pi - m\,.$$

Mais si le point λ varie sur c, les points du polyèdre P engendreront des faces, les arêtes engendreront des cases, et les faces engendreront des hyper-cases. Donc:

(10) $$\Pi^{(4)} = 2 - 2\pi - m\,.$$

D'autre part, si le point λ varie sur une des arêtes b_i, le points du polyèdre engendreront des arêtes, les arêtes des faces, et les faces des cases. Ainsi

(11) $$\Pi^{(3)} = -(\delta - 1)(2 - 2\pi - m)\,.$$

Lorsque $\lambda = a_1, a_2, \ldots, a_\delta$, la courbe du faisceau acquiert un point double, le genre s'abaisse de 1, et par consequent, $2 - 2\pi$ augmente de 2. Mais puisque nous comptons ce point double comme un *seul point* de $R_{2(1)}$ au lieu de deux, le nombre $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, (7), augmente de 1 seulement, et nous devons écrire,

(12) $$\Pi^{(2)} = \delta(2 - 2\pi - m + 1)\,.$$

Finalement,

(13) $$\Pi^{(1)} = m\,.$$

Des relations (10), (11), (12), (13) et (8) on déduit

(14) $$\Pi_{2(2)} = \delta - m + 2(2 - 2\pi)$$

et, en comparant cette expression avec l'expression (2), on vérifie la relation

(3) $$\Pi_{2(2)} = I_2 + 4\,.$$

En faisant le calcul de $\Pi_{2(2)}$ de cette manière, nous évitons de faire la subdivision de la variété $R_{2(2)}$ en un polyèdre. Si l'on rassemblait les quatre polyèdres définis ci-dessus, il faudrait encore subdiviser convenablement les éléments des trois premiers pour compléter la subdivision de $R_{2(2)}$. Mais cette opération ne changerait pas la valeur des invariants $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$ et $\Pi^{(3)}$.

4. Passons maintenant aux variétés algébriques V_n, où le nombre n dépasse 2. Nous démontrerons par récurrence un lemme et un théorème:

Lemme L(n). — Si une variété V_{n-1} acquiert un point double isolé, l'invariant $\Pi_{2(n-1)}$ de la $R_{2(n-1)}$ attachée à V_{n-1} baisse ou augmente d'une unité selon que $n - 1$ est pair ou impair, *pourvu que l'on fasse la convention de compter ce point double comme un seul point.*

Théorème T(n). — Si une variété algébrique V_n ne possède que des singularités ordinaires,

$$\Pi_{2(n)} = (-1)^n \delta + 2\Pi_{2(n-1)} - \Pi_{2(n-2)}, \tag{14'}$$

où $\Pi_{2(n)}$, $\Pi_{2(n-1)}$ et $\Pi_{2(n-2)}$ sont les invariants de Poincaré des variétés de Riemann attachées respectivement à V_n, à la variété générale V_{n-1} d'un faisceau linéaire tracé sur V_n, et à la variété-base V_{n-2} du faisceau.

Nous avons déjà démontré le théorème T(n) pour le cas $n=2$; car, dans l'égalité (14), on peut remplacer $2-2\pi$ par $\Pi_{2(1)}$ et m par $\Pi_{2(0)}$; et, tout en faisant la preuve, nous avons démontré le lemme L(2). On déduit le lemme L$(n+1)$ du théorème T(n) en remarquant que si une variété V_n acquiert un point double, le nombre δ des variétés V_{n-1} d'un faisceau tracé sur V_n qui ont un point double en dehors des points-base diminue d'une unité. Donc, le lemme L$(n+1)$ est une conséquence immédiate de la relation (14′).

Il nous reste à établir le théorème T(n) à l'aide du lemme L(n). La preuve se fait comme pour le cas $n=2$. On peut regarder la variété de Riemann $R_{2(n)}$ attachée à la variété algébrique V_n comme engendrée par la variété $R_{2(n-1)}$ attachée à une V_{n-1}, d'un faisceau $V'_{n-1}+\lambda V''_{n-1}$. La variété $R_{2(n)}$ comprend donc:

1) La variété $R_{2(n-2)}$ attachée à la variété-base du faisceau $V'_{n-1} + \lambda V''_{n-1}$.

2) δ variétés à $2(n-1)$ dimensions qui ne sont autres que les variétés $R_{2(n-1)}$ (moins la variété base $R_{2(n-2)}$) correspondant aux valeurs a_1, a_2, ..., a_δ de λ. Ces variétés auront un point double *que nous compterons comme un seul point.*

3) $\delta-1$ variétés à $2(n-1)+1$ dimensions, une pour chaque arête $b_1, b_2, \ldots, b_{\delta-1}$:

4) Une variété à $2n$ dimensions correspondant à c.

Découpons une $R_{2(n-1)}$ générale du faisceau en un polyèdre qui contient la $R_{2(n-2)}$ base parmi ses cases de dimensions $n-2$ ou moins. L'invariant de Poincaré pour $R_{2(n-1)}$, lorsqu'on exclue les cases de la variété base, sera

$$\Pi_{2(n-1)} - \Pi_{2(n-2)}, \tag{9'}$$

formule qui se réduit à (9) pour $n=2$.

Or, par le même raisonnement que pour les surfaces, nous avons de suite

$$\Pi^{(4)} = \Pi_{2(n-1)} - \Pi_{2(n-2)} \tag{10'}$$

et

$$\Pi^{(3)} = -(\delta-1)(\Pi_{2(n-1)} - \Pi_{2(n-2)}). \tag{11'}$$

De plus, en nous appuyant sur le lemme L (n),

(12') $$\Pi^{(2)} = \delta(\Pi_{2(n-1)} - \Pi_{2(n-2)}) + (-1)^n \delta$$

et finalement

(13') $$\Pi^{(1)} = \Pi_{2(n-2)} .$$

En faisant la somme, on obtient

(14') $$\Pi_{2(n)} = (-1)^n \delta + 2\Pi_{2(n-2)} - \Pi_{2(n-2)}$$

et le théorème est établi.

5. La formule (1) nous donne, pour les surfaces algébriques, V_2 (ou $R_{2(2)}$),

$$\Pi_{2(2)} = 1 - (P_1 - 1) + (P_2 - 1) - (P_3 - 1) + 1$$
$$= I_2 + 4 .$$

Mais on connait la relation

$$(P_1 - 1) = (P_3 - 1) = 2\,(p_g - p_a)\ \text{[1]}.$$

Donc, on a

(15) $$(P_2 - 1) = I_2 + 4\,(p_g - p_a) + 2$$

qui exprime le nombre des cycles à deux dimensions linéairement indépendants [2].

Le calcul des cycles de la $R_{2(2)}$ attachée à une surface algébrique se trouve fait dans deux mémoires par Poincaré [3]. Dans le premier de ces mémoires, l'espace qui contient la surface est l'ensemble des points (x, y, z) où x, y et z sont des variables complexes et non homogènes; c'est-à-dire, la région à l'infini est le domaine défini par

	$x = \infty$	y et z arbitraires
	$y = \infty$	z et x »
et	$z = \infty$	x et y »

Dans le second mémoire, l'espace est défini comme le lieu des points (x, y, z, t) où x, y, z et t sont quatre variables, complexes et homogènes. Alors la région à l'infini correspond aux valeurs $t = 0$; x, y et z arbitraires mais pas toutes nulles. C'est la seconde convention que nous avons adoptée ici.

[1] Picard, Severi, Enriques, Castelnuovo. Voir la Note de MM. Castelnuovo et Enriques à la fin du t. 2 de Picard et Simart, *Théorie des Fonctions Algébriques.*

[2] *Le nombre des cycles restant à distance finie a été calculé par Picard par d'autres méthodes,* Picard et Simart, t. 2, pp. 330 et seq.

[3] Journal de Liouville, 1902 et 1906.

La formule obtenue dans le second mémoire, page 179:

$$N + q + 2 - 4p - m$$

se réduit, lorsqu'on change à notre notation, à

$$I_2 + 2(p_g - p_a) + 2 \tag{16}$$

qui ne concorde pas avec la formule (15) quand $p_g - p_a \neq 0$, c'est-à-dire, quand la surface est irrégulière. La formule (16) semblerait être en défaut dans ces cas. Examinons, par exemple, une surface réglée de genre p. On a

$$I_2 = -4p\ ,\ (P_1 - 1) = (P_3 - 1) = 2p\ ,\ (P_2 - 1) = 2$$

qui vérifie (15) et non (16).

En conclusion, l'auteur tend à remercier vivement M. Enriques pour de nombreux renseignements et M. Chisini qui a bien voulu revoir le manuscrit.

Matematica. — *Paradossi logici.* Nota del dott. Cino Poli, presentata dal Socio C. Segre [1].

1. È merito della critica dei principî della matematica l'aver messo in chiara luce che i simboli o le idee primitive, cioè definite mediante postulati (o relazioni che le legano fra loro), sono suscettibili di differentissime interpretazioni. Valga come esempio il *punto* della moderna geometria, il quale può rappresentare tanto il punto della geometria elementare, come pure una retta, o un piano, o anche un ente definito algebricamente.

Questa verità è ormai universalmente nota e, insieme con essa, la regola generale che in un medesimo ragionamento il significato dei simboli deve essere mantenuto costante.

A nessuno studente di geometria proiettiva verrebbe in mente di mutare solo in metà dell'enunciato di un teorema la parola « punto » in « piano », o viceversa! Eppure su un errore dello stesso genere sono basati i ben noti paradossi logici!

Non parrà strano che tutti i paradossi derivino da un grossolano errore di logica, se si rifletta che questo errore è dovuto non tanto agli autori dei paradossi stessi, quanto all'essere l'idea di *classe* logicamente mal definita e perciò ambigua.

Di questo si è ben accorto il Russell il quale, per evitare queste ambiguità, ha voluto fondare la logica sul concetto di *relazione*, portando così

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1914.