# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Essendo dunque $k$ crescente con $\varrho$, eguale all'unità insieme con $\varrho$, sarà pure $k < 1$, se $\varrho < 1$ e $k > 1$ se $\varrho > 1$; c. d. d.

Dalla seconda delle (14) si ricava pure, senza difficoltà, che

$$\left\{ \begin{array}{lll} k < \varrho & \text{se} & \varrho > 1 , \\ k > \varrho & \text{se} & \varrho < 1 . \end{array} \right. \tag{17}$$

Notiamo, infine, che, dovendo essere positivo o nullo il secondo membro della (15), il caso $\varrho = 1$ comporterebbe l'unica soluzione $\eta = 1$, ossia $y = h$: il pelo libero $\lambda$ sarebbe una retta parallela al fondo; caso notoriamente privo di interesse. Restano allora da considerare i due casi $\varrho > 1$ e $\varrho < 1$, nel primo dei quali dovrà essere $1 \leq \eta \leq k$, e, nel secondo, $k \leq \eta \leq 1$.

Ciò posto, bisognerebbe procedere alla integrazione della (15). Ciò che, per la ristrettezza dello spazio concesso alle comunicazioni accademiche, sono costretto di rimandare ad una Nota successiva.

Matematica. — *Sopra una relazione fra gli elementi fondamentali di due varietà algebriche a tre dimensioni in corrispondenza birazionale.* Nota di M. PANNELLI, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

In una Nota inserita nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei dell'anno 1912, con il titolo: *Sopra una nuova proprietà delle trasformazioni birazionali dello spazio ordinario*, io ho dimostrato il teorema seguente:

« Se fra i punti di due spazi ordinarî S ed S′ ha luogo una corrispondenza birazionale, gli elementi fondamentali di questa corrispondenza sono legati tra loro dalla relazione:

$$\sigma + \tau - \sum_k \varrho_k = \sigma' + \tau' - \sum_{k'} \varrho'_{k'} , \tag{1}$$

nella quale $\sigma$ e $\tau$ indicano rispettivamente i numeri dei punti $P_l$ e delle curve $C_k$ fondamentali dello spazio S, e $\varrho_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, \tau)$ è il genere di una di queste curve; ed inoltre $\sigma', \tau'$ e $\varrho'_{k'}$ hanno i medesimi significati rispetto agli elementi fondamentali $P'_{l'}$ e $C'_{k'}$ dello spazio S′ ».

Per la validità di questo teorema è necessario che gli elementi fondamentali di ciascuno dei due spazi siano multipli ordinari per le superficie costituenti il sistema omaloidico dello spazio stesso, e di più che il cono tangente ad una di queste superficie in un punto $P_l$ (o $P'_{l'}$), come anche il gruppo dei piani che la toccano in un punto generico di una curva $C_k$

(o $C'_{k'}$), varii col variare della superficie nel sistema anzidetto. Del resto le curve $C_k$ (o $C'_{k'}$), possono appoggiarsi fra loro e possedere punti multipli ordinarî nei punti $P_l$ (o $P'_{l'}$).

Nella presente Nota mi propongo di ricercare come debba essere modificato il teorema precedente, quando in luogo di due spazi ordinarî si considerino due varietà algebriche a tre dimensioni.

1. L'illustre prof. Segre nella Memoria: *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, pubblicata negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino (vol. XXXI, a. 1896), ha dimostrato questa proprietà:

« Su una data varietà algebrica a tre dimensioni il numero dei punti « doppî staccati di superficie di un fascio, diminuito del doppio genere della « curva-base (semplice o multipla) e del doppio carattere (invariante di « Zeuthen-Segre) delle superficie generiche, dà un numero che non muta « se si cambia il fascio di superficie, e costituisce quindi un carattere « proprio della varietà a tre dimensioni ».

Quindi indicando con I questo carattere, che si chiamerà l'invariante di Segre della varietà, ed inoltre dicendo $\delta$ il numero delle superficie del fascio dotate di un punto doppio, $p$ il genere della curva-base ed $i$ l'invariante di Zeuthen-Segre di una superficie del fascio medesimo, si ha:

$$I = \delta - 2p - 2i\,. \tag{2}$$

Questa è dunque l'espressione dell'invariante I, se si suppone con il Segre, che la base del fascio considerato sia una curva semplice, o multipla, che nel primo caso contenga dei nodi suoi proprî ed anche dei punti multipli per le superficie del fascio.

Ma la base anzidetta può essere formata non solo da *più* punti multipli, ma anche da *più* curve multiple che si appoggino fra loro e passino con *più* rami per quei punti. Inoltre il fascio che si sceglie può contenere una o più superficie, ciascuna delle quali si spezzi in due.

In tali ipotesi si dimostra, con procedimenti analoghi a quelli tenuti dal Segre, che l'invariante I è dato dalla seguente espressione:

$$I = \delta - 2\sum_h g_h - 2i + 2\theta + 2\iota + 2\sum_\alpha(\pi_\alpha - 1)\,, \tag{3}$$

dove $\delta$ ed $i$ hanno i significati già loro attribuiti, $t$ è il numero dei punti multipli, e $\theta + 1$ quello delle curve costituenti la base, $g_h$ il genere di una di queste curve, e $\pi_\alpha$ quello di una curva $\Delta_\alpha$, secondo la quale si tagliano, fuori della base, le due superficie che formano una superficie composta del fascio; le somme $\sum_{h}$ e $\sum_{\alpha}$ rispettivamente estese a tutte le $\theta + 1$ curve della base e a tutte le curve $\Delta_\alpha$ [1].

2. Ciò premesso, suppongasi di avere due varietà algebriche, a tre dimensioni, W e W′, fra i punti delle quali abbia luogo una corrispondenza birazionale, i cui elementi fondamentali soddisfino alle medesime condizioni imposte agli elementi analoghi nel caso di due spazi. Si usino ancora le stesse notazioni in questo caso adottate, e riguardo alle due varietà W e W′ si ammetta che ciascuna di esse sia priva di singolarità, epperò immersa in un conveniente iperspazio.

In una qualunque delle due varietà date, per esempio in W′, si prenda un fascio (F′) di superficie F′, che abbia per base una curva semplice $\Gamma'$, di genere $p'$, la quale sia situata in posizione generica rispetto agli elementi fondamentali della stessa W′, cioè non passi per alcuno dei punti $P'_{l'}$, nè si appoggi alle curve $C'_{k'}$ il che è sempre possibile. Detto $\delta'$ il numero dei punti doppî del fascio considerato, ed $i'$ l'invariante di Zeuthen-Segre di una sua superficie, l'invariante I′ della varietà W′ è dato dalla formula:

$$I' = \delta' - 2p' - 2i' . \tag{4}$$

In virtù della trasformazione birazionale che ha luogo fra i punti delle due varietà W e W′, all'anzidetto fascio (F′) di W′ corrisponde in W un fascio (F) di superficie F, del quale è necessario esaminare tutte le particolarità.

*a*) Ogni superficie F possiede i punti $P_l$ e le curve $C_k$ di W come elementi multipli ordinarî secondo determinati gradi. Fra quei punti $P_l$ debbono essere distinti dagli altri, quelli che riescono semplici per le superficie F; quindi si dirà $s$ il loro numero, e $t$ quello dei rimanenti, in modo che essendosi già indicato con $\sigma$ il numero totale dei punti fondamentali di W, è:

$$t = \sigma - s . \tag{5}$$

[1] Si osserverà che nel caso in cui la base del fascio sia una curva semplice con punti multipli per le superficie del fascio medesimo, la formula (3) è in disaccordo con la (2), perchè nel suo secondo membro contiene in più il doppio $2t$ del numero $t$ di quei punti multipli. Ma questa contraddizione è soltanto apparente. Infatti, l'influenza che un punto $l^{plo}$ ha sull'invariante di Zeuthen-Segre di una superficie, può essere fissata ad arbitrio (veggasi, Segre. loc. cit., n. 4). Ora, per conservare all'espressione (2) l'aspetto ad essa dato dal Segre, si è mantenuta la convenzione, adottata dal Segre stesso, di aumentare l'anzidetto invariante di $l - 1$ unità per ogni punto $l^{plo}$ della superficie. Nella (3) invece si è convenuto di accrescerlo di $l$ unità, e ciò perchè così la formula (3) riesce più comoda per l'applicazione che qui deve farsene, ed inoltre la relazione:

$$i + \omega = 12 p_a + 9$$

che lega l'invariante $i$ all'invariante $\omega$ di Castelnuovo-Enriques, e al genere aritmetico $p_a$ della superficie, resta in ogni caso la stessa.

*b*) Alla curva $\Gamma'$, base del fascio (F'), corrisponde in W una curva $\Gamma$, che ha lo stesso genere $p'$ di quella.

*c*) La curva $\Gamma$ e le $\tau$ curve $C_k$ costituiscono, insieme con i punti $P_l$, la base del fascio (F).

Quindi detto $\theta + 1$ il numero complessivo delle curve formanti questa base, si ha.

$$\theta = \tau . \tag{6}$$

Inoltre, se si indica con $g_h$ il genere di una qualunque delle curve medesime, si ha ancora:

$$\sum_h g_h = p' + \sum_k \varrho_k , \tag{7}$$

essendosi già chiamato $\varrho_k$ il genere di una curva $C_k$.

*d*) Ad una superficie $F'_0$ del fascio (F'), che passi per un punto fondamentale $P'_{l'}$ di W', corrisponde nel fascio (F) una superficie, che si spezza in due: nella superficie A, corrispondente al punto $P'_{l'}$, e in una superficie B, che con la precedente costituisce una superficie F. Queste due superficie A e B s'intersecano, fuori della base del fascio (F), secondo una curva $\Delta_\alpha$, i cui punti corrispondono biunivocamente a quelli dell'intorno del punto $P'_{l'}$ sulla superficie $F'_0$, e quindi la curva stessa $\Delta_\alpha$ è del genere *zero*. Poichè i punti fondamentali $P'_{l'}$ sono per ipotesi $\sigma'$, così si hanno $\sigma'$ curve $\Delta_\alpha$; epperò indicando con $\pi_\alpha$ il genere di una qualunque di esse, si trova:

$$2 \sum_\alpha (\pi_\alpha - 1) = - 2\sigma' . \tag{8}$$

*e*) Fra i punti di due superficie corrispondenti F ed F' ha luogo una corrispondenza birazionale.

Per questa corrispondenza, in virtù delle ipotesi fatte (*a*), esistono, sulla superficie F, $s$ punti fondamentali.

Inoltre, la superficie F' incontra ogni curva $C'_{k'}$, in un numero di punti che si indicherà con $m'_{k'}$, e ciascuno di questi è un punto di F' fondamentale per l'anzidetta corrispondenza. Quindi la superficie di F' possiede $\sum_{k'} m'_{k'}$ punti fondamentali.

Perciò, detti $i$ ed $i'$ gli invarianti di Zeuthen-Segre delle superficie F ed F', si ha [1]:

$$i = i' - s + \sum_{k'} m'_{k'} . \tag{9}$$

[1] Segre, loc. cit., n. 7.

$f$) Ad ogni superficie del fascio (F′), dotata di un punto doppio, corrisponde nel fascio (F) una superficie, che possiede la medesima singolarità.

Inoltre, le superficie F′ del fascio (F′) segano sopra ogni curva $C'_{k'}$, di genere $\varrho'_{k'}$, una serie lineare d'ordine $m'_{k'}$, la quale possiede

$$2(m'_{k'}+\varrho'_{k'}-1)$$

punti doppî. Altrettante superficie del fascio (F′) riescono dunque tangenti alla curva $C'_{k'}$. A ciascuna di queste corrisponde nel fascio (F) una superficie fornita di un punto doppio.

Quindi indicando con $\delta$ il numero complessivo dei punti doppî di questo fascio (F), ed essendosi già chiamato $\delta'$ quello dei punti doppî del fascio (F′), si ottiene:

$$\delta=\delta'+2\sum_{k'}m'_{k'}+2\sum_{k'}\varrho'_{k'}-2\tau', \tag{10}$$

dove $\tau'$ è il numero delle curve $C'_{k'}$.

Ora si calcoli l'invariante I di Segre della varietà W per mezzo del fascio (F). Esso è dato dalla formula (3), nella quale al posto dei termini del 2° membro si pongano i valori che essi hanno nel caso attuale, che sono quelli somministrati dalle formule (5), (6), (7), (8), (9) e (10). Così, e tenendo conto della (4), si trova:

$$\mathrm{I}-2(\sigma+\tau-\sum_{k}\varrho_k)=\mathrm{I}'-2(\sigma'+\tau'-\sum_{k'}\varrho'_{k'}), \tag{11}$$

e questa è la relazione cercata, dalla quale si ricava:

« Se fra i punti di due varietà algebriche, a tre dimensioni, ha luogo « una corrispondenza birazionale, con soli elementi fondamentali multipli « ordinarî, la differenza:

$$(\sigma'+\tau'-\sum_{k'}\varrho'_{k'})-(\sigma+\tau-\sum_{k'}\varrho'_{k'}), \tag{12}$$

« nella quale $\sigma, \tau, \varrho_k$ e $\sigma', \tau', \varrho'_{k'}$ hanno i significati dianzi spiegati, è « eguale alla semidifferenza fra i due invarianti I′ ed I di Segre delle due « varietà date ».

In particolare, se queste due varietà hanno il medesimo invariante di Segre, la relazione (11) si riduce alla (1), cioè a quella stessa che ha luogo per lo spazio ordinario.

Infine, esservando che la differenza (12) non può essere che un numero intero, o nullo, dal teorema precedente si ricava *una condizione necessaria*, perchè fra i punti di due varietà algebriche, a tre dimensioni, possa stabilirsi una corrispondenza birazionale, con soli elementi fondamentali multipli ordinarî, ed è che *i due invarianti di Segre ad esse relativi siano due numeri eguali, oppure, se risultano diversi, entrambi pari o dispari.*