ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

Ora ciò è evidente, poichè per ipotesi nel fascio di relazioni (7) deve esisterne almeno una che soddisfaccia alla diseguaglianza che assicura la esistenza di un corpo di funzioni abeliane con la tabella (II) di periodi fondamentali; e quindi se nell' S_3 rappresentativo dei complessi lineari passanti per v e $\bar{v}$, si considera la quadrica Q imagine della congruenza avente per direttrici v e $\bar{v}$, il fascio (8) è rappresentato da una retta reale che contiene un punto reale interno a Q; cioè da una retta che taglia Q in due punti reali distinti.

Matematica. — *Sul problema degli isoperimetri.* Nota II di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

In una Nota, dal medesimo titolo della presente, inserita in questi stessi Rendiconti [1], e in un'altra successiva, apparsa in quelli del Circolo matematico di Palermo [2], studiai il problema degli isoperimetri, nei suoi due classici aspetti, con un metodo diretto, fondato sulla semicontinuità degli integrali *regolari*. I risultati cui giunsi possono riunirsi in altro, ben più generale, il quale ammette, a sua volta, una estensione relativamente a problemi di solito non considerati nella teoria degli isoperimetri, pur presentando un interesse indiscutibile.

Omettendo le dimostrazioni, che mi riservo di dare in un lavoro di indole assai complessa che ho in preparazione, mi permetto di esporre qui le proposizioni alle quali sono pervenuto.

1. Consideriamo i due integrali

$$I_C = \int_C G(x, y, x', y')\, ds,$$

$$J_C = \int_C \{ f(x, y)\, G(x, y, x', y') + M(x, y)\, x' + N(x, y)\, y' \}\, ds,$$

dove: 1°) G è una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi tre ordini, per tutti i punti (x, y) di un campo A (il quale dovrà contenere tutti i suoi punti limiti, ad eccezione di quelli che eventualmente fossero all'innfiito) e per ogni coppia (x', y') di numeri finiti non contemporaneamente nulli; 2°) f, M, N sono funzioni finite e continue in tutto il detto campo A; 3°) C è una curva continua rettificabile, appartenente ad A.

Se, in tutto il campo A *e per ognuna delle coppie* (x', y') *sopra menzionate, è*

$$G_1(x, y, x', y') = \frac{G_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{G_{x'y'}}{x'y'} = \frac{G_{y'y'}}{x'^2} > 0;$$

[1] 1° sem. 1913.

[2] *Sui problemi isoperimetrici*, tom. XXXVI (1913, 2° sem.).

se, inoltre, C *tende uniformemente alla curva continua rettificabile* $\overline{C}$ *di* A, *ed esistono finiti i limiti* $\lim\limits_{c \to \overline{c}} I_c$, $\lim\limits_{c \to \overline{c}} J_c$; *allora è*

$$\lim_{c \to \overline{c}} J_c - J_{\overline{c}} = f_{\overline{c}} (\lim_{c \to \overline{c}} I_c - I_{\overline{c}}),$$

dove $f_{\overline{c}}$ *è il valore della* f *calcolato in un punto conveniente di* $\overline{C}$.

Questo teorema vale anche se la G_1 si annulla in qualche punto di A, purchè in nessun punto sia uguale a zero per tutte le possibili coppie (x', y'); e continua ancora a sussistere, se la condizione $G_1 > 0$ viene sostituita con le due

(I) $$G_1 \geq 0 \quad , \quad G > \delta > 0 \text{ (1)},$$

valide per le stesse coppie (x, y) e (x', y').

2. Si suppongano verificate le disuguaglianze (I) e si ammetta [*condizione* α)] che, per ogni punto (x_1, y_1) di A si possa condurre, nello stesso campo A, un arco di curva (anche piccolissimo) sul quale sia sempre $f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$. Allora,

fra tutte le curve di A (*intenderemo sempre curve continue, rettificabili*) *che congiungono due dati punti* P_0, P_1, *e per le quali è* $I_c = cost$, *ve n'è sempre almeno una che rende minimo* I_c (2).

3. Osserviamo, prima di proseguire, che qui e in tutto il sèguito le curve che congiungono due punti dati P_0, P_1, possono essere sostituite con quelle che congiungono due punti arbitrariamente scelti su due linee date (non estendentisi all'infinito) o due insiemi *chiusi* dati, ed anche con tutte le possibili curve, aperte o chiuse, aventi almeno un punto in una determinata regione, *limitata*, e soddisfacenti a condizioni comunque fissate, purchè si possa dire: 1°) che ogni curva limite di curve della totalità considerata soddisfa anch'essa alle stesse condizioni; 2°) che in qualunque punto di una qualsiasi curva della totalità si possa arbitrariamente aggiungere un piccolo arco, appartenente ad A, e ciò senza uscire dalla totalità medesima. Chiameremo Γ una qualunque di queste classi di curve.

4. Analogamente a quanto si è detto al n. 2, supponendo sempre verificate le (I) e ammettendo [*condizione* β)] che, per ogni punto (x_1, y_1) di A, si possa condurre, nello stesso campo, un arco di curva sul quale sia sempre $f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$, si può affermare che, *fra tutte le curve di* Γ *che rendono* $I_c = cost$, *ve n'è sempre almeno una che dà il massimo di* J_c.

5. Qualora il segno della f resti costante, è possibile di aggiungere, ai precedenti, altri risultati, relativi al caso in cui, invece dell'integrale I_c, si tenga costante J_c. Precisamente, si ha:

(1) Con δ indicheremo sempre una costante.

(2) Avvertiamo che parleremo sempre di massimi e minimi assoluti.

1°) *se è sempre* $f \geq 0$ *ed è verificata la condizione* β), *fra quelle curve di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *che dànno ad* J_c *un valore costante, ne esiste sempre almeno una che rende minimo* I_c; analogamente,

2°) *se è sempre* $f \leq 0$ *ed è verificata la* α), *fra quelle curve di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *per le quali* J_c *mantiene un valore costante, ne esiste almeno una che rende minimo* I_c.

6. Si ha anche: *se la condizione* α) *è verificata in tutti i punti su cui è* $f \leq 0$, *e la* β) *in tutti quelli ove è* $f \geq 0$, *fra tutte le curve di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *per le quali è* $J_c = cost$ *ve n'è almeno una che rende minimo* I_c.

7. *Se le condizioni* α) e β) *sono verificate insieme, allora fra tutte le curve di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *si ha tanto il minimo quanto il massimo di* J_c *per* $I_c = cost$; *ed anche il minimo di* I_c *per* $J_c = cost$.

8. Quando si sappia che, presa una qualunque curva di $\boldsymbol{\Gamma}$, prossimi ad essa quanto si vuole esistono sempre punti nei quali è $f > 0$, si ha che, supposta soddisfatta la β), *ogni curva maximum di* J_c *per* $I_c = cost$ *è anche minimum di* I_c *per* $J_c = cost$. E analogamente, se, invece della $f > 0$, è verificata la $f < 0$, e invece della β) la α), *ogni curva minimum di* J_c *per* $I_c = cost$ *è anche maximum di* I_c *per* $J_c = cost$.

9. È evidente che la condizione α) [β)] è sempre verificata in tutti i punti interni al campo A che non sono minimi (massimi) proprii per la $f(xy)$. Ed è importante di osservare che i teoremi precedenti restano veri anche se questi minimi (massimi) effettivamente si presentano, purchè quelle curve di $\boldsymbol{\Gamma}$, che soddisfano alla data condizione $I_c = \text{cost}$ o $J_c = \text{cost}$ (secondo gli enunciati) e che ne contengono qualcuno (P_1, P_2, ..), contengano sempre anche altri punti in cui la f abbia valori inferiori (superiori) ai valori di codesti minimi (massimi) ($P_1, P_2, \ldots$), e in cui, di più, la condizione in questione [α) o β)] risulti soddisfatta. Se, all'incontro, questi ultimi punti mancano e non si sa *a priori* che le curve di $\boldsymbol{\Gamma}$ che passano per almeno uno dei minimi (massimi) soddisfano senz'altro alla condizione posta $I_c = \text{cost}$ o $J_c = \text{cost}$, allora i teoremi in parola possono cadere in difetto, e il minimo o massimo di cui si tratta può effettivamente mancare. Ciò, per esempio, si verifica nel caso della catenaria sulla sfera, quando la lunghezza fissa delle curve che si considerano supera la somma delle lunghezze degli archi di cerchio massimo che i punti dati uniscono al più basso punto della sfera. Qui è bene osservare che i risultati, che noi esponiamo per le curve del piano, si trasportano immediatamente a quelle di altre superfici, ed anche alle curve dello spazio in generale.

Circa il contorno del campo A, si può notare che, alla validità dei teoremi dati, non nuoce il fatto che la condizione α) o β) non sia soddisfatta in quei suoi punti i quali non possano essere raggiunti dalle curve di $\boldsymbol{\Gamma}$ che verificano quella, delle due eguaglianze $I_c = \text{cost}$, $J_c = \text{cost}$, di cui è fatto parola nell'enunciato del teorema stesso.

10. La proposizione del n. 6 può assumere una forma più generale di quella in cui noi l'abbiamo esposta. Si abbiano i due integrali

$$I'_c = \int_C \{ g(x\,,y)\, G(x\,,y\,,x'\,,y') + M_1(x\,,y)\, x' + N_1(x\,,y)\, y' \}\, ds\,,$$

$$J'_c = \int_C \{ f(x\,,y)\, G(x\,,y\,,x'\,,y') + M_2(x\,,y)\, x' + N_2(x\,,y)\, y' \}\, ds\,,$$

dove la G soddisfa ancora alle disuguaglianze (I), la g e la f hanno gli stessi caratteri della f dell'integrale J_c, e le M_1, N_1, M_2, N_2 quelli delle M e N del medesimo integrale. Esistano due costanti k_1, k_2 tali da rendere soddisfatte, in tutto il campo A e per tutte le solite coppie (x', y'), le disuguaglianze

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{l} k_1 g + k_2 f > 0\,, \\ (k_1 g + k_2 f)\, G + (k_1 M_1 + k_2 M_2)\, x' + (k_1 N_1 + k_2 N_2)\, y' > \delta > 0\,; \end{array} \right.$$

inoltre, per ogni punto (x_1, y_1) di A tale che $f(x_1, y_1) \geq 0$, si possa condurre un arco anche piccolissimo, appartenente ad A, sul quale sia sempre $k_1 \{ g(x_1, y_1) f(x, y) - g(x, y) f(x_1, y_1) \} \leq 0$; e per ogni altro (x_2, y_2), pure di A, tale che sia $f(x_2, y_2) \leq 0$, si possa condurre un arco analogo, sul quale sia invece $k_1 \{ g(x_2, y_2) f(x, y) - g(x, y) f(x_2, y_2) \} \geq 0$. Allora, *fra tutte quelle curve di* Γ *per le quali è* $J_c = cost$, *ve n'è almeno una che rende minimo* I_c.

Osserviamo che se, per es., è $M_1 \equiv N_1 \equiv M_2 \equiv N_2 \equiv 0$, le condizioni (II) si riducono alla sola $k_1 g + k_2 f > \delta_1 > 0$, e che questa, in particolare, è certamente soddisfatta se è, in tutto A, $f - g > \delta > 0$ (potendo anche essere $f = g$ in quei punti che rendono $f > 0$ e che appartengono ad un campo *limitato*), oppure $g - f > \delta > 0$; ed anche, se, essendo la g (o la f) sempre di un segno, positiva o negativa, in quei punti di un campo *limitato* nei quali è $g = 0$ $(f = 0)$ la $f(g)$ risulta diversa da zero, rispettivamente positiva o negativa, mentre poi nei punti di A esterni al detto campo è sempre, pure rispettivamente, $g > \delta > 0$ o $g < \delta < 0$.

11. Nel caso dei problemi *in piccolo*, negli enunciati che precedono diventano superflue le seconde disuguaglianze delle (I) e (II), purchè la uguaglianza $G_1 = 0$ non sia verificata, in nessun punto di A, identicamente per tutte le possibili coppie (x', y').

12. *Tutte le parti interne (nel senso stretto) di una delle curve maximum o minimum, di cui si è parlato sino ad ora, soddisfano contemporaneamente alle equazioni differenziali di Eulero*

$$\frac{dH_{x'}}{ds} - H_x = 0 \quad , \quad \frac{dH_{y'}}{ds} - H_y = 0\,,$$

dove si è posto (supponendo, per esempio, trattarsi degli integrali I_c e J_c) $H = [\lambda + f(x, y)]\, G + Mx' + Ny'$ *con* $\lambda =$ *cost isoperimetrica; oppure alle altre*

$$\frac{dG_{x'}}{ds} - G_x = 0 \quad , \quad \frac{dG_{y'}}{ds} - G_y = 0 \,,$$

(sempre nella stessa ipotesi): *e ciò avviene con la sola eccezione, al più, dei punti nei quali è* $(\lambda + f)\, G_1 = 0$, *nel primo caso, e* $G_1 = 0$ *nel secondo.*

13. Se i due integrali da considerarsi non hanno precisamente le forme da noi fissate, può ricorrersi alla proposizione che segue: Si abbiano gli integrali

$$I''_c = \int_C G(x, y, x', y')\, ds \quad , \quad J''_c = \int_C F(x, y, x', y')\, ds \,,$$

con G e F funzioni continue, insieme con le loro derivate parziali dei primi tre ordini, per tutti i punti (x, y) di A e tutte le solite coppie (x', y'). Si suppongano verificate le tre condizioni: 1°) una almeno delle due funzioni G e F sia sempre $> \delta > 0$ per tutti i punti (x, y, x', y') detti; 2°) sia sempre $G_1 > 0$; 3°) considerata una curva qualunque C di $\boldsymbol{\Gamma}$, e detto m il minimo di $\frac{F_1}{G_1}$ per tutti i punti (x, y) di C e tutte le possibili coppie (x', y'), su C esista almeno un punto (x_1, y_1) tale che per esso si possa sempre scegliere un numero $m_1 \leq m$ e condurre un piccolo arco, interno ad A, sul quale sia costantemente $F(x, y, x', y') - m_1 G(x, y, x', y') \leq 0$, e ciò indipendentemente dal senso in cui l'arco vien percorso. Ciò posto, *fra tutte le curve di* $\boldsymbol{\Gamma}$, *per le quali* I''_c *mantiene un valore costante, ve n'è almeno una che rende minimo* J''_c.

Questa proposizione continua a sussistere anche nel caso in cui si abbia $G_1 \geq 0$, invece di $G_1 > 0$; qui il numero m della condizione 3ª) sarà il massimo numero che rende soddisfatta la disuguaglianza $F_1 - mG_1 \geq 0$ per tutti i punti di C e tutte le possibili coppie (x', y'), supponendo, naturalmente, che tal numero esista.

14. *Per tutte le curve minimum o maximum di cui si è mostrata l'esistenza, vale il teorema di Osgood*, nella stessa forma nella quale lo enunciai, al n. 5 della Nota I, per il caso particolare ivi considerato.

15. Ritornando agli integrali I_c, J_c, vi è luogo a considerare l'eventualità che, invece della $G > \delta > 0$, si abbia $G \geq 0$. In questa ipotesi, i teoremi qui dati non rimangono veri senz'altro; però in casi particolari importanti è possibile ugualmente di giungere ad essi. Così, per non fare che un semplice esempio, nel campo A definito da $y \geq 0$, si stabilisce molto facilmente l'esistenza del minimo o del massimo di $J_c = \int y^{m+n}\, ds$ per $I_c = \int y^m\, ds$ costante; e viceversa.

16. Possono anche prendersi in considerazione problemi isoperimetrici in cui trattisi di integrali in numero maggiore di due. Si abbiano gli integrali

$$I_C = \int_C G(x, y, x', y')\, ds ,$$

$$J_C^{(r)} = \int_C \{ f_r(x, y)\, G(x, y, x', y') + M_r(x, y)\, x' + N_r(x, y)\, y' \}\, ds$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove G soddisfa alle disuguaglianze (I), e le funzioni f_r, M_r, N_r sono analoghe a quelle dell'integrale J_C. Si supponga che, preso un qualsiasi punto (x_1, y_1) di una curva arbitraria di Γ, si possa sempre condurre per esso un arco appartenente ad A e tale da soddisfare per intero alle uguaglianze $f_r(x, y) = f_r(x_1, y_1)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$. Allora *i teoremi dati sugli estremi di* J_C *per* $I_C = cost$, *si ripetono tal quali relativamente agli estremi di* $J_C^{(1)}$ *per* I_C *e* $J_C^{(r)}$ $(r = 2, 3, \ldots, n)$ *costanti.*

17. I metodi, coi quali si giunge alle proposizioni delle quali ci siamo fino ad ora occupati, hanno un carattere di generalità tale da potersi adoperare con facilità in questioni assai più complesse di quello che non siano gli ordinarii problemi isoperimetrici. Ad illustrazione di ciò, daremo la seguente proposizione: Sia $\varphi(u, v)$ una funzione finita e continua per tutti i valori delle variabili che si hanno da considerare. Si supponga che, preso ad arbitrio un punto (x_1, y_1) di una qualsiasi curva di Γ, si possa sempre condurre per esso un arco interno ad A, tale da soddisfare per intero alla uguaglianza $f(x, y) = f(x_1, y_1)$. Ciò posto,

fra tutte le curve di Γ *che verificano l'uguaglianza*

$$\varphi(I_C, J_C) = 0 ,$$

ve n'è almeno una che rende minimo I_C. *Se poi l'uguaglianza scritta è tale che da essa risulti necessariamente* $I_C <$ *di un numero fisso* (1), *si ha anche il massimo di* I_C, *e si hanno pure il minimo e il massimo di* J_C.

(1) Ciò, per es., si verificherebbe se fosse $\varphi = I_C(1 + J^2_C) - 1$.