ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXI.

1914

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1914

La formule obtenue dans le second mémoire, page 179:

$$N + q + 2 - 4p - m$$

se réduit, lorsqu'on change à notre notation, à

$$\mathrm{I}_2 + 2(p_g - p_a) + 2 \tag{16}$$

qui ne concorde pas avec la formule (15) quand $p_g - p_a \neq 0$, c'est-à-dire, quand la surface est irrégulière. La formule (16) semblerait être en défaut dans ces cas. Examinons, par exemple, une surface réglée de genre p. On a

$$\mathrm{I}_2 = -4p \;,\; (\mathrm{P}_1 - 1) = (\mathrm{P}_3 - 1) = 2p \;,\; (\mathrm{P}_2 - 1) = 2$$

qui vérifie (15) et non (16).

En conclusion, l'auteur tend à remercier vivement M. Enriques pour de nombreux renseignements et M. Chisini qui a bien voulu revoir le manuscrit.

Matematica. — *Paradossi logici.* Nota del dott. Cino Poli, presentata dal Socio C. Segre [1].

1. È merito della critica dei principî della matematica l'aver messo in chiara luce che i simboli o le idee primitive, cioè definite mediante postulati (o relazioni che le legano fra loro), sono suscettibili di differentissime interpretazioni. Valga come esempio il *punto* della moderna geometria, il quale può rappresentare tanto il punto della geometria elementare, come pure una retta, o un piano, o anche un ente definito algebricamente.

Questa verità è ormai universalmente nota e, insieme con essa, la regola generale che in un medesimo ragionamento il significato dei simboli deve essere mantenuto costante.

A nessuno studente di geometria proiettiva verrebbe in mente di mutare solo in metà dell'enunciato di un teorema la parola « punto » in « piano », o viceversa! Eppure su un errore dello stesso genere sono basati i ben noti paradossi logici!

Non parrà strano che tutti i paradossi derivino da un grossolano errore di logica, se si rifletta che questo errore è dovuto non tanto agli autori dei paradossi stessi, quanto all'essere l'idea di *classe* logicamente mal definita e perciò ambigua.

Di questo si è ben accorto il Russell il quale, per evitare queste ambiguità, ha voluto fondare la logica sul concetto di *relazione*, portando così

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1914.

il suo simbolismo ad una complicazione enorme, ben lungi dalla splendida semplicità del simbolismo di Peano. Basta invece apportare una lieve modificazione a quest'ultimo, senz'alterarne menomamente la semplicità e l'eleganza, per poter evitare i paradossi.

Ma delle modificazioni relative alla scrittura simbolica mi occuperò altrove; qui voglio solo accennare a ciò che può interessare anche i non logici - matematici.

Dopo il Russell, si è occupato dei paradossi, facendone una critica minuziosa e profonda, B. Levi [1]. Egli, però, pur ricordando la indeterminazione e la costanza del significato delle idee primitive [2], giunge alla conclusione che « assegnato un qualsiasi procedimento univoco di elementazione, esistono aggregati cui il procedimento stesso non si applica » [3].

Questa affermazione spiega è vero i paradossi, ma rimane in ultima analisi un paradosso essa stessa, poichè sembra contrario all'intuizione che esistano classi a cui non si applichi il procedimento di elementazione, mentre sembra evidente che qualsiasi classe possa esser pensata come individuo. La negazione di questa possibilità è una proposizione oscura quanto i paradossi che si vogliono evitare, sebbene legittima.

2. Fra le idee primitive della logica, quella di *classe* (collezione, aggregato, insieme) sembra una delle più chiare e intuitive; senonchè non è stato mai osservato esplicitamente che il concetto intuitivo è di *classe di cose*. Non è vero che dalla considerazione di classi di particolari oggetti si giunga per astrazione al concetto di *classe*. Astraendo dalle proprietà particolari degli oggetti, si giunge alla più generale idea di *classe di cose qualunque*, ma l'idea di classe rimane sempre unita, anzi *presuppone sempre* l'idea delle cose che la costituiscono.

Questi oggetti coi quali formeremo la classe possono essere (anzi, finchè stiamo nel campo della pura logica, sono necessariamente) indeterminati; ma essi sono da ritenersi invariati in tutto il ragionamento, in omaggio alla regola generale ricordata al numero precedente.

In altri termini: *a base di ogni proposizione logica stanno gli oggetti coi quali si possono formare le classi che compaiono nella proposizione stessa, e in ogni relazione le classi non possono essere costituite che coi detti oggetti i quali sono da ritenersi dati prima di porre la relazione.* È ben evidente che non è richiesto che questi oggetti siano effettivamente definiti in un modo qualsiasi; la loro interpretazione è in nostro arbitrio, soltanto non si potrà mai supporre che fra essi ve ne sia qualcuno

[1] Beppo Levi, *Antinomie logiche?* Ann. di matem. (3), 15 (1908), pp. 187-216.
[2] Loc. cit., pag. 190.
[3] Loc. cit., pag. 214.

definito dalla stessa proposizione che si considera. Poichè è evidente che un oggetto definito da una proposizione non si può supporre dato *prima* della proposizione stessa che lo definisce.

Si potrà obbiettare che in questo modo restringo arbitrariamente l'idea primitiva di classe. Ciò è vero, ma è sufficiente rispondere che il mio scopo è precisamente quello di mostrare che *con una conveniente determinazione dell'idea di classe si possono evitare le contraddizioni messe in evidenza dai noti paradossi.*

Questa ragione è già sufficiente a giustificare le mie restrizioni; e la loro necessità acquisterebbe un'evidenza assoluta, se potessi qui mostrare le basi che il concetto logico di classe e il ragionamento logico in generale hanno nell'intuizione spaziale. Ma non è questo il luogo opportuno per inoltrarsi in tali considerazioni e mostrare quanta luce possa portare nella logica matematica la critica kantiana, rettamente interpretata, che è invece tanto scaduta nell'opinione dei matematici!

3. Secondo la regola posta al numero precedente, una classe a considerata come individuo (la indico con a') non potrà mai essere un elemento di sè stessa nè della sua negazione (*non* a); poichè essa è costituita di certi oggetti dati prima della sua formazione e quindi fra essi non può esservi già la classe stessa considerata come individuo. E similmente la negazione di a, cioè la classe *non* a, dovendo esser pure costituita di oggetti preesistenti ad a, non può contenere neppur essa a'.

Colla nuova definizione di classe, dire che « x non è a » equivale a dire « x è *non* a » solo se x è un oggetto definito indipendentemente da a stesso.

Riassumendo: *se a è una classe di oggetti e a' è un oggetto definito mediante a, è errato tanto dire che a' è un elemento di a, quanto dire che a' è un elemento di non a.*

Questa proposizione viene a coincidere col « vicious-circle principle » di Russell (1): « whatever involves *all* of a collection must not be one of the collection ». Tranne che per me non è un « principio », ma una conseguenza diretta della definizione di classe di oggetti.

Mediante questo teorema i paradossi vengono evitati, poichè essi sono basati tutti (2) su classi che contengono sè stesse o una loro funzione. Per la dimostrazione di questo, non ho che da rimandare alle note ampie critiche di Russell nei *Principles of mathematics* o nei *Principia mathematica* (3).

(1) A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia mathematica*, Cambridge, 1910, tom. I, pag. 40.

(2) Ad eccezione di quello di Richard che è puramente un giuoco su parole di significato incerto.

(3) Loc. cit., tom. I, cap. II.

4. Per dare un esempio, esaminerò il paradosso di Russell che è il più breve.

Sia w l'insieme delle classi che non contengono sè stesse come elemento. Se si suppone che w sia un elemento di sè stessa, per la definizione di w risulta che essa sarà una classe che non contiene sè stessa come elemento. Se invece si suppone che w non appartenga (come elemento) a sè stessa, se ne deduce che w non è una classe che non appartiene a sè stessa.

In un caso e nell'altro, la conclusione contraddice all'ipotesi.

Nel primo caso ciò è naturale, perchè l'ipotesi che w appartenga a sè stessa è assurda per il teorema del n. 3.

Nel secondo caso l'assurdo scompare se si parla di classi di cose, poichè allora w resta definita come la *classe delle classi di oggetti* che non appartengono a sè stesse. E dall'ipotesi « w non è un elemento di w » si dedurrà « w non è una *classe di oggetti* che non appartiene a sè stessa »: ciò che è ben naturale, poichè w era una classe di classi di oggetti e quindi non può essere una classe di oggetti.

Chimica. — *Sopra la preparazione della pirrolaldeide* [1]. Nota preliminare di L. Alessandri, presentata dal Socio A. Angeli [2].

Avendo riguardo all'importanza ed allo sviluppo degli studî sui derivati del pirrolo, per suggerimento del prof. Angeli ho eseguito delle esperienze preliminari per accertare se due reazioni, che avevano grande probabilità di riuscita, avessero dato modo di pervenire, anche con buoni rendimenti, alla così detta aldeide α-pirrolica.

È noto infatti come E. Bamberger [3] ottenne per primo questo interessante derivato pirrolico preparandolo per azione della potassa e del cloroformio sul pirrolo; ma, a detta dell'autore stesso, il procedimento è oltremodo laborioso ed il rendimento assai scarso: il 12,7 % circa della quantità che dovrebbe formarsi secondo l'equazione che trascrivo dalla sua Nota:

$$C_4H_5N + CHCl_3 + 3KOH = C_4H_4N(CHO) + 3KCl + 2H_2O\,.$$

Un altro modo di preparazione venne successivamente indicato ed applicato agli indòli da A. Angeli [4], e consiste nell'azione di un formiato alchi-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica del R. Istituto di Studî superiori di Firenze.

[2] Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1914.

[3] E. Bamberger e G. Djierdijan, Berl. Ber. *33* (1900) pag. 536.

[4] A. Angeli e G. Marchetti, Questi Rendiconti, vol. XVI (1907), 1° sem., pag. 381; e dei medesimi autori, ibidem, vol. XVI (1907), 2° sem., pag. 790.