ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 maggio 1915.

O. Tommasini, Socio anziano (Presidente).

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann.* Nota II del Corrispondente Francesco Severi.

5. Punti doppî proprî ed improprî rispetto alle curve di una data famiglia. — Sia V una famiglia di curve C_p^n nello $S_r (r > 2)$. Si dice che una curva C della famiglia, ha acquistato un (nuovo) *punto doppio proprio* P, quando l'acquisto di tal punto singolare trae seco l'abbassamento di un'unità nel genere effettivo p di C; il nuovo punto doppio P dicesi invece *improprio*, quando la C, che lo ha acquistato, ha ancora il genere p.

Se la particolar curva C appartiene ad un'altra famiglia W, rispetto a questa il punto doppio acquistato da C può esser di specie diversa, che non rispetto a V. Un esempio espressivo in proposito, vien dato dalle quartiche sghembe razionali con un punto doppio, in quanto si considerino come forme limiti delle quartiche sghembe ellittiche, o delle quartiche razionali, senza punti doppî.

Rispetto alla varietà delle corde e alla sviluppabile osculatrice della curva variabile nella famiglia V, i punti proprî ed improprî si comportano in modo essenzialmente diverso.

Quando C acquista il punto doppio proprio P, la congruenza delle corde della curva variabile ha per limite la *sola* varietà delle corde della curva limite, e la sviluppabile osculatrice ha per limite la sviluppabile oscula-

trice alla curva limite, insieme al fascio di raggi individuato dalle due tangenti in P, contato doppiamente.

Mentre, allorchè C acquista il punto doppio improprio P, la varietà delle corde della curva variabile ha per limite una congruenza spezzata nella varietà delle corde della curva limite ed in una stella di raggi, di centro P, situata in un S_3, la cui posizione dipende dalla legge colla quale la curva variabile si avvicina alla curva limite. La sviluppabile osculatrice ha invece per limite la *sola* sviluppabile osculatrice della curva limite.

Quando la curva C_p variabile in V, si spezza in 2 parti C'_{p_1}, C''_{p_2}, aventi δ punti comuni, questi punti saranno proprî rispetto a V ogni volta sia $p = p_1 + p_2 + \delta - 1$. Che se $p < p_1 + p_2 + \delta - 1$, qualcuna delle intersezioni di C', C'', è un punto doppio improprio.

La condizione che s'impone alle curve di V, volendo che acquistino un nuovo punto doppio proprio in un punto non dato di S_r, è di dimensione 1; mentre l'imposizione di un punto doppio improprio, in un punto non dato, è una condizione $(r-2)$-pla, *sempre che, beninteso, le condizioni suddette sieno compatibili colla definizione della famiglia* V.

6. Il teorema fondamentale per le famiglie non speciali. — Sia, nello S_r, una famiglia V non speciale di curve C_p^n $(n \geq p + r)$. Dal fatto che alla famiglia V' delle curve piane irriducibili d'ordine n, con $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ nodi, *le quali possono considerarsi tutte come proiezioni delle* C_p^n, appartiene (n. 4) ogni curva spezzata in una curva irriducibile d'ordine $n-1$ e genere $p-1$ ed in una retta, si deduce agevolmente che V contiene curve composte mediante una C_{p-1}^{n-1} irriducibile ed una sua corda. Ma non è perciò detto nè che V contenga *ogni* curva così composta, nè quindi che le rette che entrano come componenti nelle suddette C_p^n spezzate, sieno proprio corde o non piuttosto i-secanti $(i \geq 3)$ delle relative C_{p-1}^{n-1}. Nulla di assurdo ci sarebbe in ciò, perchè in tal caso fra questi i punti d'appoggio, $i-2$ dovrebbero esser punti doppî improprî rispetto alle curve di V.

Per provare che effettivamente V contiene ogni curva spezzata in una C_{p-1}^{n-1} ed in una corda di questa, procediamo così: L'imposizione di 2 punti doppî proprî alle curve di V, equivale a 2 condizioni (al più), sicchè si avranno in V ∞^k curve siffatte, ove

$$k \geq \lambda \; (\lambda = n(r+1) - (r-3)(p-1) - 2).$$

La varietà Σ di queste curve, può essere riducibile, e può anche darsi che qualcuna delle sue *parti* sia di dimensione λ, e qualche altra di dimensione $\lambda + 1$. Comunque è certo che una, D, delle curve di V composte con una C_{p-1}^{n-1} e con una corda a di questa (la quale sia eventualmente i-secante), in quanto è appunto una C_p^n con 2 punti doppî proprî (e forse $i-2$ im-

proprî) appartiene ad una varietà irriducibile $W\infty^{\lambda}$ contenuta in Σ. Ora è facile vedere che ogni curva di W è spezzata.

Infatti le proiezioni piane della D e di una $\overline{D}$ di W ad essa infinitamente vicina, hanno lo stesso numero $h+2$ di punti doppî, sicchè anche la proiezione della $\overline{D}$, e perciò la $\overline{D}$ stessa, pel principio già ricordato di Enriques, è spezzata. Ed è poi chiaro che lo spezzamento di $\overline{D}$ non può aver luogo che in una C_{p-1}^{n-1} ed in una sua corda. Le curve di W sono dunque spezzate tutte come D, e quindi W è contenuta nella varietà W_1 delle curve composte da una qualsiasi C_{p-1}^{n-1} e da una qualsiasi corda di questa. Ma poichè anche W_1 è irriducibile e di dimensione λ, si conclude che W coincide con W_1.

Ricordiamoci ora che un qualunque $(n-p)$-latero di genere effettivo zero in S_r, è contenuto nella varietà delle curve razionali d'ordine $n-p$. Siccome ogni tal curva, insieme ad una sua corda, dà una curva appartenente alla varietà delle curve ellittiche di S_r, se ne trae che a questa varietà appartiene ogni $(n-p)$-latero di genere effettivo zero, insieme ad una sua corda; e così risalendo dal genere 1 al genere 2, ed in generale da $p-1$ a p, si arriva al teorema fondamentale:

Alla famiglia non speciale V *delle* C_p^n *di* S_r $(n \geq p+r)$, *appartiene ogni n-latero composto mediante un* $(n-p)$*-latero di genere effettivo zero, insieme a p corde generiche di questo.*

In particolare si possono prendere $n-p$ rette $a_1, a_2, \ldots, a_{n-p}$, di cui ciascuna sia appoggiata alla successiva, ma l'ultima sia sghemba colla prima, e p corde generiche dell'$(n-p)$-latero $a_1\, a_2 \ldots a_{n-p}$; oppure $n-p-1$ rette generiche $a_2, \ldots, a_{n-p}$, appoggiate ad a_1, e p corde generiche di questo $(n-p)$-latero. Si osserverà che così si ottiene *un n-latero rappresentante tipico della famiglia* V, *nel quale mai tre lati giacciono in un piano.*

Per ottenere gli n-lateri contenuti in V, si può anche imporre alle curve di V di acquistare $n+p-1$ punti doppî proprî, perchè in tal modo la sviluppabile osculatrice di C_p^n, che è d'ordine $2(n+p-1)$, viene a spezzarsi in $n+p-1$ fasci di raggi contati doppiamente, e quindi la curva riducesi ad un sistema connesso di rette. Così s'impongono $n+p-1-\varepsilon$ $(\varepsilon \geq 0)$ condizioni, per guisa che l'infinità degli n-lateri contenuti in V risulta espressa da:

$$k_{n,r} = n(r+1) - (r-3)(p-1) - (n+p-1-\varepsilon) = \\ = nr - (r-2)(p-1) + \varepsilon.$$

D'altronde, che $k_{n,r}$ non sia inferiore ad $nr-(r-2)(p-1)$, risulta pur da ciò che gli n-lateri di genere effettivo p in S_r, dipendono almeno da tante costanti, perchè la condizione d'incidenza di due rette è di dimensione $r-2$. Vedremo al n. 8 *che la varietà degli n-lateri contenuti in* V *è spezzata e che in essa vi sono generalmente parti di diverse dimensioni;*

ma possiamo subito provare che *tuttavia in* V *vi è sempre una famiglia completa di n-lateri, che ha la dimensione regolare* $nr - (r-2)(p-1)$.

La cosa si dimostra per induzione, a partire da un $(n-p)$-latero di genere effettivo zero, costituito da $n-p-1$ rette incidenti ad una medesima ed osservando che l'aggiunta di una corda generica ad un $(n-p+i)$-latero $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$, aumenta l'ordine ed il genere effettivo di un'unità ed il numero dei parametri di 2 unità.

7. Come una famiglia speciale si possa considerare parzialmente contenuta in una non speciale. — Abbiasi in S_r una famiglia speciale $(n < p + r)$ di C_p^n irriducibili. Dal n. 4 risulta che la generica proiezione piana C' di C_p^n, insieme a δ rette del piano, ove $n + \delta \geq p + r$, qualora si consideri come inesistente, per ogni retta aggiunta, uno dei punti ov'essa incontra C', appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili d'ordine $n + \delta$ e genere p. E poichè ognuna di queste curve è proiezione di qualche $C_p^{n+\delta}$ di S_r, se ne trae agevolmente che *la curva speciale* C_p^n *di* S_r *insieme a* δ *sue rette secanti, ove* $\delta \geq p + r - n$, *può considerarsi con un elemento della famiglia non speciale delle* $C_p^{n+\delta}$ *irriducibili di* S_r.

Alla stessa conclusione si perviene nel modo seguente, dal quale risulta di più che le δ secanti, da aggiungersi a C_p^n, non secano altrove la curva. Si consideri un S_r' sghembo con S_r, e pongasi un'omografia fra S_r, S_r'. La curva C_p^n viene mutata in una $C_p'^n$ di S_r', e le congiungenti delle coppie di punti omologhi di C, C', generano una rigata F, di genere p e ordine $2n$, rispetto alle cui generatrici le C, C' sono unisecanti. Si prova, senza difficoltà, che su F le C, C' appartengono ad un medesimo fascio $|C|$, di grado 0. Se pertanto s'aggiunge a $|C|$ una serie lineare g_δ^ϱ $(\varrho > 0)$ di generatrici di F, il sistema lineare somma, di curve unisecanti, d'ordine $n + \delta$ e genere p, sarà irriducibile. Proiettando in S_r, e tenendo conto dell'osservazione con cui si chiude il n. 1, si conclude col teorema enunciato.

Un'analisi ulteriore proverebbe anzi che le δ rette secanti possono scegliersi ad arbitrio.

8. Il teorema fondamentale per le C_p^n di una famiglia qualunque. — Sia in S_r una famiglia V di C_p^n. Se $n < \frac{r}{r+1} p + r$, le curve di questa famiglia sono a moduli particolari (n. 3). Per valutare la dimensione x di V, si può ripetere il ragionamento svolto da Noether per le curve gobbe [17], e si trova così per x il limite inferiore (3) (n. 3).

Dunque: *Una famiglia qualunque di* C_p^n, *nello* S_r, *ha dimensione non minore di* $n(r+1) - (r-3)(p-1)$.

[17] Noether, loc. cit., pag. 19. Trattandosi qui di trovare un limite inferiore per x, non occorre alcuna considerazione del tipo di quelle esposte al n. 3, ove si voleva pervenire ad un'uguaglianza (valida per le famiglie di curve a moduli generali).

L'eccesso e di questa dimensione, sul limite inferiore (3), lo chiameremo l'*irregolarità* di V. Per $n \geq \frac{r}{r+1} p + r$ la famiglia è di certo *regolare*.

Sia ora δ un intero per cui sia soddisfatto il teorema del num. prec.; e sia inoltre W la famiglia non speciale delle $C_p^{n+\delta}$ di S_r. Con un ragionamento analogo a quello esposto nel n. 6, si prova che le curve composte mediante una C_p^n di V, alla quale vengono aggiunte δ rette secanti generiche, costituiscono una *parte* della varietà formata dalle curve di W dotate di δ punti doppî proprî. Si perviene così alla relazione

$$x + r\delta = (n + \delta)(r + 1) - (r - 3)(p - 1) - \delta + e \quad (e \geq 0),$$

donde si trae di nuovo $x = n(r + 1) - (r - 3)(p - 1) + e$.

Imponiamo ora alle curve di V di acquistare $n + p - 1$ punti doppî proprî, cioè di spezzarsi in n rette. Si può subito osservare che *queste condizioni son compatibili colla definizione di* V. Infatti il cono Γ che proietta una generica C_p^n da un punto O, fuori di S_r, contiene un sistema lineare ∞^{r+1} di sezioni iperpiane, fra cui c'è la C_p^n data ed i gruppi di n generatrici staccati su Γ dagl'iperpiani (di S_{r+1}) uscenti dal vertice O. Proiettando tutto sullo S_r primitivo, da un generico punto P di S_{r+1}, si ha in S_r un sistema irriducibile ∞^{r+1}, di curve C_p^n, cui appartengono la curva data ed ∞^r n-lateri. Poichè questo sistema è contenuto in V (n. 1), si conclude che V contiene effettivamente curve degenerate in gruppi di n rette distinte.

Gli $n + p - 1$ punti doppî proprî imposti, equivalgono ad $n + p - 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$) condizioni, cosicchè esistono in V infiniti n-lateri dipendenti da $nr - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$ parametri. Ciascuno di questi punti n-lateri, insieme a δ sue rette secanti, fornisce un $(n + \delta)$-latero di W. Si ottiene in tal modo in W una varietà di $(n + \delta)$-lateri, di dimensione $(n + \delta) r - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$, e si prova così che *ad una famiglia non speciale* W, *la quale contenga parzialmente una famiglia irregolare di curve, appartengono due o più varietà irriducibili di n-lateri, di cui alcune di dimensione regolare e le altre di dimensione irregolare.*

Ci resterebbe da mostrare che gli n-lateri esistenti in V son privi di punti doppî improprî, cioè che il loro genere effettivo coincide col genere virtuale p. Rimandiamo al n. 9 per talune induzioni in proposito, riservandoci di completare questo punto nel lavoro più esteso. Enunceremo concludendo che:

In ogni famiglia V *di curve* C_p^n *dello* S_r, *esistono almeno* $\infty^{rn-(r-2)(p-1)}$ *n-lateri di genere p. L'irregolarità di* V *non supera la massima irregolarità d'una famiglia completa di n-lateri di genere p in* S_r.

Un'altra disuguaglianza cui soddisfa e, è la seguente, che si ottiene con semplici considerazioni di geometria sopra una curva:

L'irregolarità di V *non supera* $(r-2)\,i$, *i essendo l'indice di specialità della generica* C_p^n.

9. Sull' inversione del teorema fondamentale. — Dato in S_r un n-latero (connesso) $L \equiv a_1 a_2 \ldots a_n$, di genere effettivo $p \geq 0$, è possibile costruire una famiglia di curve irriducibili C_p^n di S_r, cui appartenga L? Per rispondere a questa domanda, osserviamo anzitutto che *tutti gli n-lateri aventi lo stesso schema di connessione, formano una varietà irriducibile.*

Dicendo che due n-lateri hanno lo stesso *schema di connessione* o che sono *isomorfi*, intendiamo che si possa porre fra i loro lati una corrispondenza biunivoca tale, che a due lati incidenti dell'uno rispondano due lati incidenti dell'altro, e viceversa.

Per dimostrare la proposizione enunciata, si può profittare ad esempio del fatto che, dato un n-latero L di genere $p \geq 0$, è sempre possibile di scegliere $n-1$ vertici, i quali bastino a stabilire la connessione fra i lati di L, per guisa che, dopo ciò, L possa considerarsi come proiezione di un n-latero L_0 di genere effettivo zero, appartenente ad S_n, ed avente p corde appoggiate al centro di proiezione (n. 4). L'affermazione enunciata, si riconduce allora all'altra, pressochè evidente, che in S_n gli n-lateri isomorfi fra loro, costituiscono una sola varietà.

Premesso questo, ricordiamoci (n. 4) che, dato in S_r lo n-latero L, esiste sempre qualche curva razionale C, ad esso infinitamente vicina, la quale possiede $q \leq p$ nodi infinitamente prossimi ad altrettanti vertici di L. Ne deriva che esiste una sottofamiglia V di curve razionali con q punti doppî, alla quale appartengono tutti gli n-lateri isomorfi con L.

Proiettiamo genericamente la C sopra un piano. Poichè la proiezione C′ appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili, d'ordine n e genere q, se ne deduce, se $n \geq q + r$, che C appartiene alla famiglia W delle C_q^n di S_r. La sottofamiglia V è pertanto contenuta in W, ed a W appartengono perciò tutti gli n-lateri isomorfi con L. Rispetto a W, $n + q - 1$ nodi di L son proprî, e gli altri $p - q$ improprî.

Se poi $n < q + r$ si giunge ad una conclusione analoga, usufruendo del teorema di Riemann-Roch, per le *curve non aggiunte* ([18]). Dunque:

Dato in S_r *un n-latero (connesso) di genere effettivo* $p \geq 0$, *esso definisce sempre qualche famiglia di curve irriducibili d'ordine n e genere* $q \leq p$, *prive di punti multipli. Rispetto alle curve di questa famiglia,* $p - q$ *nodi del dato n-latero sono da considerarsi come improprî. Due n-lateri isomorfi, definiscono la stessa famiglia.*

([18]) Noether, *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven* (Math. Annalen, 15, 1879), pag. 507.

È appena necessario di avvertire che deve esistere qualche condizione complementare, affinchè un n-latero di genere effettivo p, definisca, in S_r, una famiglia di C_p^n irriducibili, senza punti multipli, e di genere uguale a p. È ben noto infatti che il genere delle C_p^n irriducibili, senza punti multipli, di S_r, non può sorpassare un certo massimo, assegnato, per r qualunque, da Castelnuovo; e che d'altra parte, come ha provato Halphen (per $r = 3$), anche al disotto di questo massimo, vi sono lacune nei valori possibili di p.

Ritengo per certo che la risposta a tale importante questione debba ottenersi mediante il teorema di Riemann-Roch per le curve spezzate [19]; ma su ciò, come ho detto, mi propongo di ritornare. Il risultato definitivo dovrebbe esser questo:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè un n-latero L, di genere « effettivo $p \geq 0$, definisca in S_r una famiglia di C_p^n irriducibili (senza punti « multipli), quando $n < p + r$, è che per gli h punti doppî della generica « proiezione piana L′ di L, provenienti dai punti doppî apparenti di L, pas- « sino almeno $\infty^{p+r-n-1}$ curve d'ordine $n - 4$, le quali non contengano come « parte alcuna retta di L′. Per $n \geq p + r$, non si richiede alcuna condizione ».

Una volta provato questo, si potrà completare il teorema del n. prec., perchè ne deriverà la possibilità di costruire in S_r un n-latero di genere *effettivo* p, isomorfo con un n-latero M di genere virtuale p, contenuto in una data famiglia V di C_p^n, ove beninteso l'isomorfismo fra L, M, si ponga astraendo dagli eventuali punti doppî improprî di M. Si concluderà così che a V appartiene anche lo n-latero L.

Non va inoltre taciuto che *due n-lateri non isomorfi posson anche definire la stessa famiglia.* Questa circostanza si verifica pure nel caso più semplice delle curve razionali. Così, p. es., nello spazio ordinario, i quadrilateri $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ collo schema di connessione (12) (23) (34) — in cui cioè a_2 appoggiasi ad a_1, a_3 ad a_2, a_4 ad a_3 — ed i quadrilateri collo schema (12) (13) (14), definiscon entrambi la famiglia delle quartiche di 2ª specie. Ciascuno dei due schemi suddetti dà luogo ad una famiglia regolare di quadrilateri, che contiene 13 costanti.

Quando i due n-lateri dipendono dallo stesso numero di parametri, un criterio sufficiente, per decidere s'essi definiscono o no famiglie distinte, è dato dalla considerazione delle superficie (o forme) del minimo ordine a cui essi appartengono.

Per es. nel caso $n = 9$, $p = 10$, le due famiglie distinte di curve gobbe, incontrate per la prima volta da Halphen, son definite da due 9-lateri dei tipi seguenti:

1) Sei lati son generatrici di una schiera rigata e gli altri 3 generatrici della schiera rigata incidente.

[19] Noether, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven* (Acta math., 8, 1886), pag. 161.

2) I 9 lati son le intersezioni di una superficie generale del 3° ordine, con 3 de' suoi piani tritangenti.

I 9-lateri di questi due tipi dipendono ciascuno da un numero regolare, 18, di costanti, e definiscon famiglie distinte, perchè per quelli del tipo 1) le superficie minime son quadriche, mentre per gli altri son superficie del 3° ordine.

10. Applicazioni a questioni di postulazione. — La degenerazione delle curve algebriche in sistemi di rette, si applica utilmente alle questioni di postulazione; e si posson così ottenere, in questo campo, molti risultati nuovi.

Mi limiterò ad un esempio, calcolando la postulazione offerta alle forme d'ordine l di S_r, da una C_p^n generica, con $n \geq p + r$.

Poichè, appena sia $l \geq 2$, l'ordine della $g_{nl}^{r_l}$, staccata su una C_p^n dalle forme di ordine l, è non speciale, sarà $r_l \leq nl - p$, e quindi la postulazione P_l non supererà $nl - p + 1$. D'altronde, quando C_p^n degenera in un $(n-p)$-latero di S_r, collo schema $(12)(13)\ldots(1, n-p)$, ed in p corde generiche di questo $(n-p)$-latero, si trova subito che la postulazione è esattamente $nl - p + 1$; e poichè, particolarizzando C_p^n nella propria famiglia, la postulazione non può crescere, così si conclude che $P_l = nl - p + 1$. Dunque:

L'ordine minimo delle forme di S_r *che contengono una generica* C_p^n, *quando* $n \geq p + r$, *è il minimo intero* λ *per cui* $\binom{\lambda + r}{r} + p \geq n\lambda + 2$. *Le forme d'ordine* $l \geq \lambda$ *staccano su* C_p^n *una serie completa non speciale.*

Naturalmente, quando C_p^n si particolarizza entro la propria famiglia, l'ordine minimo suddetto potrà abbassarsi e potrà perciò non valer più il teorema precedente. Così, ad es., per una generica quintica gobba razionale, è $\lambda = 3$; ma, come si sa, vi sono anche quintiche razionali (irriducibili) tracciate su quadriche.

11. Applicazioni alla geometria numerativa. — Dalla possibilità che una C_p^n di S_r, variando nella propria famiglia, possa degenerare in un n-latero di genere p, si deduce *la completa giustificazione dei metodi di spezzamento parziale o totale, usati da varî Autori per la determinazione di numeri inerenti alle curve algebriche, nonchè la legittimità delle applicazioni del metodo funzionale di Cayley.*

È vero che non si potrà sempre ricorrere allo spezzamento totale in rette, perchè potrà darsi che il numero che si ricerca divenga infinito, per inevitabili legami sussistenti fra i lati di un n-latero, appartenente ad una data famiglia. Così, ad es., chi voglia l'ordine della rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba, non potrà senz'altro ricorrere alla degenerazione in rette, perchè potrebbe darsi che, nella famiglia di C_p^n, ogni n-latero dovesse avere di necessità tre o più rette in un piano. È appunto questo il caso della C_{10}^9 del tipo 2) considerato alla fine del n. 9.

Ma comunque, profittando dei teoremi dei nn. 6, 7, si potrà sempre pervenire rigorosamente al risultato, nel modo che ora indichiamo, riferendoci per brevità alla rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba.

Se $n \geq p+3$, la C_p^n può degenerare in un n-latero L, di genere effettivo p, tale che mai più di due lati di L stanno in un piano (n. 6). L'ordine della rigata delle trisecanti si valuterà quindi subito, riferendosi alla *rigata* delle trisecanti di L. Si troverà così per quest'ordine l'espressione ben nota $\varphi(n, p)$, che non occorre qui trascrivere, bastandoci di avvertire ch'essa risulta evidentemente funzione soltanto di n, p. Dopo ciò si supponga che la C_p^n sia qualunque, anche con $n < p+3$.

Si potranno allora aggiungere ad essa δ rette secanti, per guisa da ottenere una $C_p^{n+\delta}$, appartenente alla famiglia delle curve gobbe irriducibili d'ordine $n+\delta \geq p+3$. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n, si otterrà allora togliendo da $\varphi(n+\delta, p)$, δ volte l'ordine della rigata formata dalle corde di C_p^n appoggiate ad una sua secante; $\binom{\delta}{2}$ volte l'ordine della rigata formata dalle rette appoggiate a C_p^n e a 2 delle sue δ secanti; e infine $\binom{\delta}{3}$ volte l'ordine della schiera rigata costituita dalle rette appoggiate a 3 delle δ secanti di C_p^n; i quali ordini sono evidentemente funzioni delle sole n, p. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n, risulterà dunque, in ogni caso, funzione delle sole n, p, e dovrà pertanto coincidere colla funzione $\varphi(n, p)$ prima trovata.

Come ho detto, con procedimenti di questo genere, si giustifica in ogni caso anche l'applicazione del metodo funzionale di Cayley. Nè fanno eccezione i problemi relativi a coniche plurisecanti di curve gobbe (Berzolari, Severi), giacchè in questi casi, qualora, per la ragione detta sopra, non serva lo spezzamento in rette, si potrà ricorrere ad uno spezzamento misto della C_p^n in rette, coniche, cubiche gobbe, spezzamento la cui legittimità si stabilisce, per $n \geq p+3$, con procedimenti analoghi a quelli già sviluppati (n. 6). E si osserverà poi che l'aggiunta di convenienti rette o coniche o cubiche, ad una qualunque C_p^n $(n < p+3)$, dà luogo ad una C_p^m $(m > n)$ appartenente ad una famiglia non speciale (cfr. col n. 7).

Queste considerazioni fanno senz'altro prevedere come sia possibile assurgere rigorosamente alla seguente conclusione generale:

Ogni numero inerente ad una C_p^n di S_r, in quanto sia relativo ad una condizione algebrica che abbia senso per una curva qualunque di ordine e genere dati, è una funzione razionale delle sole variabili n, p.

12. Applicazioni alle questioni di realità. — Dirò in proposito soltanto poche parole, perchè applicazioni di questo genere si prevedono senz'altro, quando si tenga presente il metodo cosidetto della « piccola variazione », che si usa nelle questioni di realità per le curve piane.

Dato un n-latero reale L di genere effettivo o virtuale p, appartenente ad una famiglia V di C_p^n irriducibili di S_r, a partire da un punto vicino ad un lato, si segua il lato stesso, finchè si arrivi vicino ad un punto doppio proprio P. Senza bruschi cambiamenti nella curvatura della traiettoria, si prosegua allora lungo il lato che si connette al precedente attraverso P, e così di seguito. Si otterrà una traiettoria che rappresenterà con grande approssimazione la forma di una curva di V vicina ad L, ed avente perciò, rispetto alle curve della famiglia, il massimo numero di rami reali, purchè si osservino inoltre queste due regole, d'immediata giustificazione:

1) Ad ogni segmento d'un lato di L, che non contenga nodi proprî, deve esser sempre vicino uno ed un sol pezzo della traiettoria.

2) Quando s'incontra un punto doppio improprio Q, si deve proseguire a mantenersi vicini al lato lungo cui si camminava, come se Q non ci fosse.

Per contare i rami *graficamente* distinti della curva, si avvertirà che due rami metricamente distinti, i quali siano « paralleli » a due semiraggi opposti, situati sullo stesso lato a di L, ed aventi per origini due diversi nodi proprî, si riconnettono attraverso al punto all'infinito di a (supposto, beninteso, ch'esso non sia un nodo proprio).

Matematica. — *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Se l'elemento lineare ds dello spazio euclideo, riferito ad un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3), assume la forma

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2, \tag{1}$$

si sa che le sei rotazioni β_{ik}, definite dalle formole

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i} \qquad (i \neq k),$$

soddisfano al sistema delle nove equazioni differenziali del primo ordine:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = -\beta_{li}\,\beta_{lk}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove (i, k, l) indica una qualunque permutazione degli indici 1, 2, 3.

Viceversa, se le sei funzioni β_{ik} di u_1, u_2, u_3 verificano le (2), esistono infiniti sistemi tripli ortogonali con queste rotazioni e dipendenti da tre funzioni arbitrarie. La ricerca di questi sistemi tripli ortogonali si può com-