ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Dato un n-latero reale L di genere effettivo o virtuale p, appartenente ad una famiglia V di C_p^n irriducibili di S_r, a partire da un punto vicino ad un lato, si segua il lato stesso, finchè si arrivi vicino ad un punto doppio proprio P. Senza bruschi cambiamenti nella curvatura della traiettoria, si prosegua allora lungo il lato che si connette al precedente attraverso P, e così di seguito. Si otterrà una traiettoria che rappresenterà con grande approssimazione la forma di una curva di V vicina ad L, ed avente perciò, rispetto alle curve della famiglia, il massimo numero di rami reali, purchè si osservino inoltre queste due regole, d'immediata giustificazione:

1) Ad ogni segmento d'un lato di L, che non contenga nodi proprî, deve esser sempre vicino uno ed un sol pezzo della traiettoria.

2) Quando s'incontra un punto doppio improprio Q, si deve proseguire a mantenersi vicini al lato lungo cui si camminava, come se Q non ci fosse.

Per contare i rami *graficamente* distinti della curva, si avvertirà che due rami metricamente distinti, i quali siano « paralleli » a due semiraggi opposti, situati sullo stesso lato a di L, ed aventi per origini due diversi nodi proprî, si riconnettono attraverso al punto all'infinito di a (supposto, beninteso, ch'esso non sia un nodo proprio).

Matematica. — *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Se l'elemento lineare ds dello spazio euclideo, riferito ad un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3), assume la forma

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2\,, \tag{1}$$

si sa che le sei rotazioni β_{ik}, definite dalle formole

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i} \qquad (i \neq k),$$

soddisfano al sistema delle nove equazioni differenziali del primo ordine:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = -\,\beta_{li}\,\beta_{lk}\,, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove (i, k, l) indica una qualunque permutazione degli indici $1, 2, 3$.

Viceversa, se le sei funzioni β_{ik} di u_1, u_2, u_3 verificano le (2), esistono infiniti sistemi tripli ortogonali con queste rotazioni e dipendenti da tre funzioni arbitrarie. La ricerca di questi sistemi tripli ortogonali si può compiere in due modi diversi, sostanzialmente equivalenti [1]. Il primo modo consiste nell'assumere come incognite i coefficienti H_1, H_2, H_3 nella (1), ed allora queste tre funzioni debbono unicamente soddisfare al sistema lineare:

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \qquad (i \neq k). \tag{3}$$

Nel secondo modo si prendono invece come incognite le tre distanze (algebriche), che diremo W_1, W_2, W_3, di un punto fisso dello spazio (p. es. dell'origine) dalle tre facce del triedro principale. In tal caso le W_i debbono soddisfare al sistema, che diremo l'*aggiunto* di (3):

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \qquad (i \neq k). \tag{3*}$$

Si osservi che se (H_1, H_2, H_3), (W_1, W_2, W_3) sono due terne qualunque di soluzioni, la prima del sistema (3), l'altra dell'aggiunto (3*), si ha:

L'espressione $H_1 W_1 du_1 + H_2 W_2 du_2 + H_3 W_3 du_3$ *è un differenziale esatto.*

Le ricerche contenute nella presente Nota muovono dal considerare che, in molte questioni concernenti i sistemi tripli ortogonali, si riscontra come una reciprocità fra le proprietà che dipendono dalle H_i e quelle che si riferiscono alle W_i.

Ora si sa che in quei sistemi tripli ortogonali (u_1, u_2, u_3) in cui la famiglia $u_3 = \text{cost}$ consta di superficie a curvatura costante, basta scegliere convenientemente i parametri u_1, u_2 perchè i coefficienti H_1^2, H_2^2 risultino legati da una relazione lineare

$$H_1^2 + cH_2^2 = \text{cost},$$

dove c è una costante che si può porre, del resto, senza alterare la generalità, $= \pm 1$. Dopo ciò, risulta naturale la domanda se esistono sistemi tripli ortogonali, corrispondenti in certo modo ai superiori secondo l'accennata legge di reciprocità, e pei quali si verifichi una relazione della forma

$$W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost}, \tag{a}$$

dove ora per altro il valore della costante c risulterà essenziale, e soltanto saranno da escludersi i casi impossibili $c = 0$, $c = 1$ [2].

[1] Ved. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (2ª ediz., 1910. Livre III, chap. V), od anche le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 413.

[2] Se fosse $c = 0$, le superficie $u_1 = \text{cost}$ dovrebbero ridursi ad un'unica sfera. Se $c = 1$, le curve (u_3) avrebbero tutte le tangenti a distanza costante dall'origine e sarebbero tutte tracciate sopra una sfera col centro in questo punto, casi manifestamente assurdi.

Siccome W_1, W_2 sono le distanze dall'origine dei piani principali delle superficie $u_3 = \text{cost}$, la (a) rappresenta un'equazione del secondo ordine a cui tutte le $u_3 = \text{cost}$ debbono soddisfare, sicchè il problema proposto è il seguente:

Trovare tutte le famiglie di Lamè composte di superficie integrali della equazione (a) *a derivate parziali del secondo ordine.*

Si vedrà che esistono in effetto infiniti di tali sistemi tripli ortogonali e dipendono da tre funzioni arbitrarie *essenziali*. Questi sistemi tripli godono di singolari proprietà geometriche, che sono del resto comuni anche a tutti i loro sistemi paralleli, e per le quali i sistemi stessi vengono a collegarsi colle congruenze pseudosferiche.

Avvertiamo che nelle ricerche seguenti sarà trascurato, come ovvio, il caso che nel sistema triplo figuri una serie di sviluppabili, e per ciò supporremo che *nessuna delle rotazioni* β_{ik} *si annulli.*

2. Per trattare analiticamente il nostro problema dobbiamo aggregare al sistema delle equazioni (2) e (3*) per le nove funzioni incognite β_{ik}, W_i l'equazione in termini finiti (a) fra W_1, W_2. Scrivendo in primo luogo per disteso le (2), abbiamo il sistema:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13}\,\beta_{32}\,, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21}\,\beta_{13}\,, \quad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32}\,\beta_{21}\\
&\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23}\,\beta_{31}\,, \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31}\,\beta_{12}\,, \quad \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12}\,\beta_{23}\\
&\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = -\beta_{31}\,\beta_{32}\,, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = -\beta_{12}\,\beta_{13}\,,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} = -\beta_{23}\,\beta_{21}\,,
\end{aligned}\right.$$

e similmente per la (3*)

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\star \qquad \frac{\partial W_1}{\partial u_2} = \beta_{12} W_2\,, \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \beta_{13} W_3\\
&\frac{\partial W_2}{\partial u_1} = \beta_{21} W_1\,, \quad \star \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \beta_{23} W_3\\
&\frac{\partial W_3}{\partial u_1} = \beta_{31} W_1\,, \quad \frac{\partial W_3}{\partial u_2} = \beta_{32} W_2 \quad \star
\end{aligned}\right.$$

Ora se l'equazione in termini finiti (a) si deriva rapporto ad u_1, u_2, u_3 mediante le (5), e dai risultati si sopprimono i rispettivi fattori non nulli W_1, W_2, W_3, si trovano le due equazioni differenziali

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial u_1} = -c\,\beta_{21} W_2\\
&\frac{\partial W_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{c}\,\beta_{12} W_1\,,
\end{aligned}\right.$$

e l'altra in termini finiti

$$\beta_{13}\,W_1 + c\beta_{23}W_2 = 0\,. \tag{7}$$

Paragonando le (6) colle equazioni delle due prime linee in (5) e costruendo le corrispondenti condizioni d' integrabilità, si hanno le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} &c\frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{21}W_2) + \frac{\partial}{\partial u_1}(\beta_{12}W_2) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial u_1}(\beta_{12}W_1) + c\frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{21}W_1) = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &c\frac{\partial}{\partial u_3}(\beta_{21}W_2) + \frac{\partial}{\partial u_1}(\beta_{13}W_3) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial u_3}(\beta_{12}W_1) + c\frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{23}W_3) = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Eseguendo le derivazioni colle (4), (5) e (6), ed osservando la (7), troviamo che si riducono alle tre condizioni:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} + c\frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} = 0 \\ &\frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_1} = -c\,\beta_{21}\beta_{23} \quad , \quad \frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_2} = -\frac{1}{c}\,\beta_{12}\beta_{13}\,. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

La prima di queste, combinata colla prima equazione della terza linea in (4), porge

$$\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} = \frac{c}{1-c}\,\beta_{31}\beta_{32} \quad , \quad \frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} = -\frac{1}{1-c}\,\beta_{31}\beta_{32}\,.$$

Ed ora, aggregando queste ultime e le due seconde (8) al sistema (4), questo resta risoluto rispetto a due delle derivate di ciascuna rotazione ed assume la seguente forma definitiva:

$$\text{(I)}\quad\left\{\begin{array}{lll} \quad\star & \dfrac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} = \dfrac{1}{c-1}\,\beta_{31}\beta_{32}\;, & \dfrac{\partial\beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23}\beta_{31}\,, \\ \quad\star & \dfrac{\partial\beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32}\beta_{21}\;, & \dfrac{\partial\beta_{31}}{\partial u_3} = (c-1)\,\beta_{21}\beta_{23}\,, \\ \dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} = \dfrac{c}{1-c}\,\beta_{31}\beta_{32}\;, & \quad\star & \dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13}\beta_{32}\,, \\ \dfrac{\partial\beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31}\beta_{12}\;, & \quad\star & \dfrac{\partial\beta_{32}}{\partial u_3} = \dfrac{1-c}{c}\,\beta_{12}\beta_{13}\,, \\ \dfrac{\partial\beta_{13}}{\partial u_1} = -\,c\beta_{21}\beta_{23}\;, & \dfrac{\partial\beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12}\beta_{23} & \quad\star \\ \dfrac{\partial\beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21}\beta_{13}\;, & \dfrac{\partial\beta_{23}}{\partial u_2} = -\dfrac{1}{c}\,\beta_{12}\beta_{13}\;, & \quad\star\;. \end{array}\right.$$

Vediamo dunque intanto che: *Se in un sistema triplo ortogonale* (u_1, u_2, u_3) *le superficie* $u_3 = cost$ *sono integrali della equazione del secondo ordine* (a)

$$W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost}$$

le rotazioni β_{ik} *debbono soddisfare al sistema* (I).

Inversamente si vedrà fra breve che ad ogni sistema di rotazioni β_{ik}, che soddisfino le (I), corrisponde un sistema triplo ortogonale della specie richiesta, univocamente determinato a meno di un'omotetia.

Per semplificare le ricerche conviene osservare la seguente singolare proprietà di costruzione nel sistema (I): *Il sistema differenziale* (I) *resta invariato per una permutazione qualunque degli indici* $1, 2, 3$, *purchè si eseguisca contemporaneamente sulla costante* c *una corrispondente sostituzione lineare del gruppo diedrale* G_6 *del rapporto anarmonico.*

Per accertarsene basta osservare: 1°) Il sistema (I) non cangia scambiando l'indice 1 con 2 e mutando c in $\frac{1}{c}$; 2°) esso non muta nemmeno per la permutazione circolare $(1, 2, 3)$, cangiando insieme c in $\frac{1}{1-c}$. Dopo ciò la proprietà enunciata resta evidente, e ne segue che la corrispondenza (d'isomorfismo oloedrico) fra le 6 permutazioni degli indici e le 6 sostituzioni lineari del gruppo diedrale su c è data da

$$1 \sim c \quad , \quad (123) \sim \frac{1}{1-c} \quad , \quad (132) \sim \frac{c-1}{c}$$

$$(12) \sim \frac{1}{c} \quad , \quad (23) \sim \frac{c}{c-1} \quad , \quad (13) \sim 1 - c \, .$$

3. Ed ora la prima questione analitica che si presenta è di esaminare la compatibilità delle 12 equazioni simultanee (I) per le 6 incognite β_{ik}, e valutare il grado di arbitrarietà dell'integrale generale.

Il sistema (I) assegna, per ciascuna delle β_{ik}, due delle derivate prime come prodotto di altre due β, e ciò in guisa che se si costruiscono le 6 corrispondenti condizioni d'integrabilità, delle quali la prima è

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3}\right) - \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2}\right) = \frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{23}\,\beta_{31}) + \frac{1}{1-c}\frac{\partial}{\partial u_3}(\beta_{31}\,\beta_{32}) = 0\,,$$

si trovano tutte soddisfatte, in virtù delle (I) stesse. Il sistema (I) appartiene dunque ad una delle più semplici classi di sistemi lineari canonici *completamente integrabili* del Bourlet [1], ed ammette quindi infinite solu-

[1] Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées* (Annales de l'École Normale Supérieure, tom. VIII, 3ème série suppl. (1891)]. Per il caso semplice attuale ved. anche Darboux (loc. cit.). Livre III, chap. I.

zioni dipendenti da sei funzioni arbitrarie. Precisamente se consideriamo un sistema iniziale di valori per u_1, u_2, u_3, sia per semplicità $(0, 0, 0)$, le (I) *posseggono uno ed un solo sistema di soluzioni* β_{ik}, tali che

$$\beta_{21}, \beta_{31}$$

si riducano a due funzioni arbitrariamente date della variabile u_1, quando vi si fa $u_2 = u_3 = 0$, e similmente

$$\beta_{12}, \beta_{32} \text{ a funzioni date di } u_2, \quad \text{per} \quad u_1 = u_3 = 0,$$
$$\beta_{13}, \beta_{23} \text{ a funzioni date di } u_3, \quad \text{per} \quad u_1 = u_2 = 0.$$

Ma osserviamo subito che tre di queste funzioni arbitrarie sono soltanto apparenti, e dipendono dall'arbitrarietà ancora lasciata ai parametri u_1, u_2, u_3. E così, p. es., senza alterare la generalità, possiamo prescrivere che risulti

$$\beta_{21}(u_1, 0, 0) = 1, \quad \beta_{32}(0, u_2, 0) = 1$$
$$\beta_{13}(0, 0, u_3) = 1.$$

Concludiamo adunque che in realtà:

L'integrale generale del sistema (I) *nelle* β_{ik} *dipende da tre funzioni arbitrarie essenziali.*

Questi risultati conducono naturalmente a cercare di esprimere le 6 incognite β_{ik} per tre sole ausiliarie, e l'opportuna introduzione di queste tre incognite ausiliarie viene suggerita dal riconoscere che il sistema (I), ammette tre integrali quadratici facilmente distinguibili.

Se costruiamo in effetto le tre espressioni

$$(9) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = (1 - c)\, \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 \\ \Omega_2 = (1 - c)\, \beta_{12}^2 - c\beta_{32}^2 \\ \Omega_3 = \beta_{13}^2 + c\beta_{23}^2, \end{cases}$$

riconosciamo che a causa delle (I) stesse si ha identicamente

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial u_1} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial u_2} = 0 \text{ [1]},$$

onde segue che Ω_1 è funzione della sola u_1, Ω_2 della sola u_2, ed Ω_3 di u_3. Inoltre se si considera che, cangiando i parametri u_1, u_2, u_3, le rotazioni β_{21}, β_{31} risultano moltiplicate per un fattore arbitrario funzione di u_1, e similmente β_{12}, β_{32} per una funzione di u_2, e β_{13}, β_{23} per una funzione di u_3, si vede che è lecito alterare $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ per rispettivi fattori *positivi* arbitrarii, ordinatamente funzioni di u_1, u_2, u_3.

[1] Basta del resto verificare queste ultime ed applicare poi l'osservazione alla fine del n. 2.

Procediamo ora alla riduzione del sistema (I) a forme normali, osservando che ci possiamo limitare a supporre la costante c *negativa*.

E invero, da quanto si è detto alla fine del n. 2, risulta che ogni altro caso si riconduce a questo, effettuando sugli indici la permutazione circolare (123) o il suo quadrato (132), poichè dei tre valori

$$c\,,\ \frac{1}{1-c}\,,\ \frac{c-1}{c}$$

uno è sempre negativo, gli altri due positivi.

4. Limitandoci dunque al caso di c negativa, poniamo

$$c = -\,tg^2\sigma\,,$$

dove σ denota un angolo costante reale (arbitrario).

Secondo le (9), le tre espressioni

$$\frac{\beta_{21}^2}{\cos^2\sigma}+\beta_{31}^2\,,\quad \frac{\beta_{12}^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}+\beta_{32}^2\,,\quad \frac{\beta_{13}^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}-\frac{\beta_{23}^2}{\cos^2\sigma} \tag{10}$$

saranno rispettivamente funzioni la prima di u_1, la seconda di u_2, la terza di u_3. Ma poichè le due prime sono positive, potremo intanto disporre dei parametri $u_1\,,u_2$ sì da rendere

$$\frac{\beta_{21}^2}{\cos^2\sigma}+\beta_{31}^2=1\,,\quad \frac{\beta_{12}^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}+\beta_{32}^2=1. \tag{10*}$$

Quanto alla terza, avremo da suddistinguere secondo che è diversa da zero, oppure nulla:

1º caso $\Omega_3 \neq 0$. Senza alterare la generalità, scambiando se occorre i parametri $u_1\,,u_2$, possiamo supporre $\Omega_3>0$, ed allora disponiamo anche di u_3 in guisa che si abbia

$$\frac{\beta_{13}^2}{\operatorname{sen}^2\sigma}-\frac{\beta_{23}^2}{\cos^2\sigma}=1\,. \tag{10**}$$

La forma delle (10*), (10**) suggerisce l'introduzione di tre funzioni ausiliarie $\theta\,,\varphi\,,\psi$, per le quali esprimiamo le 6 rotazioni colle formole:

$$\left\{\begin{aligned}
\beta_{21}&=\cos\sigma\cos\theta\,, & \beta_{31}&=\operatorname{sen}\theta\\
\beta_{12}&=\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,, & \beta_{32}&=\operatorname{sen}\varphi\\
\beta_{13}&=\operatorname{sen}\sigma\cosh\psi\,, & \beta_{23}&=\cos\sigma\operatorname{senh}\psi\,.
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Introducendo questi valori delle β_{ik} nelle (I), ove è da farsi inoltre $c = -tg^2\sigma$, il sistema si riduce nelle tre funzioni incognite θ, φ, ψ al seguente:

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} * & \dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \quad , & \dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} = -\operatorname{senh}\psi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \quad , & * & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} = -\cosh\psi \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\sigma\cos\theta \quad , & \dfrac{\partial\psi}{\partial u_2} = \cos\sigma\cos\varphi & * \end{array} \right.$$

Risulta già da quanto si è detto al n. 2, e si può constatare anche subito direttamente, che le condizioni d'integrabilità per questo sistema (II) sono identicamente soddisfatte, onde l'integrale generale (θ, φ, ψ) dipende da tre funzioni arbitrarie (essenziali).

2^o *caso* $\Omega_3 = 0$. In questo secondo caso, avendosi

$$\frac{\beta_{13}}{\operatorname{sen}\sigma} = \pm \frac{\beta_{23}}{\cos\sigma},$$

potremo limitarci a prendere il segno superiore, bastando cangiare nel caso contrario σ in $-\sigma$. Ed allora, mantenendo per β_{21}, β_{31} ; β_{12}, β_{32} le posizioni fatte in (11), poniamo invece

$$\frac{\beta_{13}}{\operatorname{sen}\sigma} = \frac{\beta_{23}}{\cos\sigma} = e^{\psi},$$

dove è da notarsi che, cangiando il parametro u_3, si può aumentare l'ausiliaria ψ di una funzione arbitraria di u_3. I valori delle rotazioni saranno dunque ora:

$$(11^*) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_{21} = \cos\sigma\cos\theta \quad , & \beta_{31} = \operatorname{sen}\theta \\ \beta_{12} = \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi \quad , & \beta_{32} = \operatorname{sen}\varphi \\ \beta_{13} = \operatorname{sen}\sigma\, e^{\psi} \quad , & \beta_{23} = \cos\sigma\, e^{\psi}, \end{array} \right.$$

ed al sistema differenziale (II) si sostituirà l'altro:

$$(\text{II}^*) \quad \left\{ \begin{array}{lll} * & \dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \quad , & \dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} = -e^{\psi} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta & * & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} = -e^{\psi} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\sigma\cos\theta \quad , & \dfrac{\partial\psi}{\partial u_2} = \cos\sigma\cos\varphi & * \end{array} \right.$$

Anche qui le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte, e l'integrale generale (θ, φ, ψ) dipende da tre funzioni arbitrarie.

Inversamente, ad ogni terna (θ, φ, ψ) che soddisfi alle equazioni (II), ovvero alle (II*), corrisponderà (n. 1) un'intera classe di sistemi tripli ortogonali paralleli, le cui rotazioni β_{ik} saranno date dalle (11) nel primo caso, dalle (11*) nel secondo.

5. Ma ora dobbiamo ritornare al nostro problema primitivo (n. 1) e ricercare se fra i sistemi tripli ortogonali anzidetti ne esiste qualcuno in cui le superficie $u_3 = \text{cost}$ soddisfino la equazione (a), la quale, nella nostra ipotesi di

$$c = -\operatorname{tg}^2\sigma\,,$$

assume la forma

$$\cos^2\sigma\, W_1^2 - \operatorname{sen}^2\sigma W_2^2 = \text{cost}\,. \tag{12}$$

Supponiamo dapprima di trovarci nel primo caso del n. 4 in cui valgono le (11) e le (II), ed osserviamo che la equazione (7) n. 2:

$$\beta_{13}\, W_1 = \operatorname{tg}^2\sigma\, \beta_{23}\, W_2$$

diventa qui per le (11)

$$\cos\sigma \cosh\psi\,.\,W_1 = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\psi\,.\,W_2\,.$$

Possiamo dunque porre:

$$W_1 = \lambda \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\psi \quad , \quad W_2 = \lambda \cos\sigma \cosh\psi\,,$$

dove λ indica un fattore di proporzionalità, il quale a causa della (12) deve necessariamente essere una costante. Sostituendo al sistema triplo un sistema omotetico, si può fare senz'altro $\lambda = 1$

$$W_1 = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\psi \quad , \quad W_2 = \cos\sigma \cosh\psi\,.$$

Dopo ciò le due formole dell'ultima colonna in (5) dànno concordemente $W_3 = \dfrac{\partial\psi}{\partial u_3}$; ed inversamente si vede che, ponendo.

$$W_1 = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{senh}\psi \quad , \quad W_2 = \cos\sigma \cosh\psi \quad , \quad W_3 = \frac{\partial\psi}{\partial u_3}\,, \tag{13}$$

tutte le condizioni (5) risultano verificate dando alle rotazioni β_{ik} i valori (11). Si conclude quindi:

Ad ogni terna (θ, φ, ψ) *integrale del sistema* (II) *corrisponde uno ed un solo sistema triplo ortogonale colle rotazioni* β_{ik} *date dalle* (11), *le cui superficie* $u_3 = \text{cost}$ *soddisfano alla condizione*

$$\frac{W_2^2}{\cos^2\sigma} - \frac{W_1^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} = 1\,.$$

In effetto un tale sistema è univocamente definito dalle (13).

In simil modo si tratta l'altro caso che le β_{ik} siano date dalle (11*), soddisfacendo θ, φ, ψ al sistema (II*). La (7) n. 2 diventa ora semplicemente

$$\cos\sigma\, W_1 = \operatorname{sen}\sigma\, W_2\,,$$

e noi poniamo in corrispondenza

$$W_1 = \lambda \operatorname{sen}\sigma\, e^{\psi} \quad , \quad W_2 = \lambda \cos\sigma\, e^{\psi}$$

con λ fattore di proporzionalità. Ma dalle due equazioni (5)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial u_1} &= \beta_{21} W_1 = \cos\sigma \cos\theta\, W_1 \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_2} &= \beta_{12} W_2 = \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi\, W_2 \end{aligned}\right.$$

risulta ora

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\lambda e^{\psi}) = \lambda \operatorname{sen}\sigma \cos\theta\, e^{\psi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u_2}(\lambda e^{\psi}) = \lambda \cos\sigma \cos\varphi\, e^{\psi}\,,$$

indi per le (II*)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial\lambda}{\partial u_2} = 0\,.$$

Il fattore λ dipende dunque solo da u_3, ed anzi, aumentando ψ di una funzione di u_3 (n. 4), possiamo rendere senz'altro $\lambda = 1$. Così troviamo

$$W_1 = \operatorname{sen}\sigma\, e^{\psi} \quad , \quad W_2 = \cos\sigma\, e^{\psi} \quad , \quad W_3 = \frac{\partial\psi}{\partial u_3}\,; \tag{13*}$$

e viceversa con questi valori di W_1, W_2, W_3 sono soddisfatte le (5), e ne resta definito un sistema triplo ortogonale della specie voluta.

Si osservi che:

In questi sistemi tripli ortogonali (13*) *le superficie* $u_3 = \text{cost}$ *hanno costante* $(= \operatorname{tg}\sigma)$ *il rapporto* $\frac{W_1}{W_2}$ *delle distanze dall'origine dai piani principali; inoltre le loro trajettorie ortogonali* (u_3) *sono curve piane.*

Quest'ultima asserzione risulta provata da ciò che il rapporto delle due rotazioni β_{13}, β_{23} è costante.

6. Così abbiamo risoluto il problema proposto solo nel caso che nella equazione (a) il valore della costante c sia negativo. Per altro le considerazioni alla fine del n. 2 ci dimostrano che, per risolverlo negli altri casi, basterà riferirsi sempre alle formole del n. 4 con uno scambio opportuno di indici, effettuando in pari tempo sulla costante c la corrispondente sostituzione lineare. Ora se nella relazione (a)

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost}$$

operiamo la sostituzione circolare (123) cangiando in pari tempo c in $\frac{1}{1-c}$, questa diventa

$$W_2^2 + \frac{1}{1-c} W_3^2 = \text{cost},$$

e ripetendo l'operazione

$$W_3^2 + \frac{c-1}{c} W_1^2 = \text{cost}.$$

Poichè adunque si ha qui $c = -\operatorname{tg}^2\sigma$, ci resta ancora da esaminare se fra i sistemi tripli ortogonali corrispondenti alle formole (11) o (11*) per le rotazioni ne esistono di quelli che soddisfino la condizione

$$W_2^2 + \cos^2\sigma\, W_3^2 = \text{cost}, \tag{14}$$

e di quelli che soddisfino l'altra

$$W_1^2 + \operatorname{sen}^2\sigma\, W_3^2 = \text{cost}. \tag{15}$$

La questione si risolve affermativamente, ambedue le volte, coll'assegnare gli effettivi valori che debbono darsi a W_1, W_2, W_3. Il procedimento, affatto analogo a quello del n. 5, consiste nell'aggregare la equazione in termini finiti (14), ovvero la (15), alle equazioni differenziali (3*) per le W. Facciamo i calcoli nel caso delle equazioni (11) e (II) n. 4, ove le equazioni differenziali per le W si scrivono

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{lll} \star & \dfrac{\partial W_1}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi W_2\ , & \dfrac{\partial W_1}{\partial u_3} = \cos\sigma \operatorname{senh}\psi\, W_3 \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial u_1} = \cos\sigma\cos\theta W_1 & \star & \dfrac{\partial W_2}{\partial u_3} = \cos\sigma \operatorname{senh}\psi\, W_3 \\ \dfrac{\partial W_3}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\theta W_1\ , & \dfrac{\partial W_3}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\varphi\, W_2 & \star \end{array}\right.$$

Se a queste aggreghiamo dapprima la (14), derivando questa rapporto ad u_1, risulta per le (16) stesse

$$\cos\theta\, W_2 + \cos\sigma \operatorname{sen}\theta\, W_3 = 0,$$

onde possiamo porre

$$W_2 = \lambda \cos\sigma \operatorname{sen}\theta \quad , \quad W_3 = -\lambda\cos\theta,$$

e λ sarà per la (14) una costante, che possiamo porre $= 1$.

Dopo ciò, p. es., dalla prima equazione della seconda linea in (16) viene $W_1 = \frac{\partial\theta}{\partial u_1}$; ma inversamente se si prende

$$W_1 = \frac{\partial\theta}{\partial u_1} \quad , \quad W_2 = \cos\sigma \operatorname{sen}\theta \quad , \quad W_3 = -\cos\theta \tag{17}$$

si soddisfano, a causa delle (II), tutte le equazioni (16), e resta quindi definito dalle (17) un sistema triplo ortogonale colle rotazioni (11), e con W_2, W_3 legate dalla relazione

$$\frac{W_2^2}{\cos^2\sigma} + W_3^2 = 1 .$$

In modo analogo, aggregando invece la (15), si trovano le formole

$$(18) \qquad W_1 = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad W_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \quad , \quad W_3 = -\cos\varphi ,$$

che definiscono un altro sistema triplo ortogonale parallelo al precedente, e con W_1, W_3 legate dalla relazione

$$\frac{W_1^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} + W_3^2 = 1 .$$

Da ultimo, se si considera il secondo caso del n. 4 e si suppone che per le β_{ik} valgano le (11*) e per θ, φ, ψ le formole (II*), si trova ancora che le formole stesse (17) e (18) definiscono i due sistemi tripli ortogonali cercato.

7. Tutti i sistemi tripli ortogonali le cui rotazioni β_{ik} soddisfano alle equazioni (I) n. 2 godono di una notevole proprietà geometrica comune di cui diciamo al numero seguente. Qui osserviamo che, in grazia appunto delle particolari relazioni (I) a cui soddisfano le β_{ik}, si possono stabilire delle trasformazioni speciali che dànno il passaggio da un sistema tziplo ortogonale noto (u_1, u_2, u_3) della specie a nuovi sistemi tripli ortogonali *paralleli al primitivo*.

Sussiste invero la proposizione seguente:

Se le rotazioni β_{ik} *soddisfano alle condizioni* (I), *ed è* (W_1, W_2, W_3) *una terna qualunque di soluzioni del sistema* (3*), *le formole*

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial W_1}{\partial u_1} + c\beta_{21} W_2 \\ H_2 &= c\,\frac{\partial W_2}{\partial u_2} + \beta_{12} W_1 \\ H_3 &= \beta_{13} W_1 + c\beta_{23} W_2 \end{aligned} \right.$$

definiscono una soluzione (H_1, H_2, H_3) *del sistema aggiunto.*

La verifica è immediata, quando si tenga conto che le β_{ik} soddisfano alle (I), e le W_i alle (3*).

Dall'osservazione alla fine del n. 2 segue poi immediatamente che si ottengono medesimamente nuove terne (H_1, H_2, H_3) di soluzioni delle (3) colle formole

$$(19')\qquad \left\{\begin{aligned} H_1 &= \beta_{21} W_2 + \frac{1}{1-c}\beta_{31} W_3 \\ H_2 &= \frac{\partial W_2}{\partial u_2} + \frac{1}{1-c}\beta_{32} W_3 \\ H_3 &= \frac{1}{1-c}\frac{\partial W_3}{\partial u_3} + \beta_{23} W_2 , \end{aligned}\right.$$

come pure colle altre

$$(19'')\qquad \left\{\begin{aligned} H_1 &= \frac{c-1}{c}\frac{\partial W_1}{\partial u_1} + \beta_{31} W_3 \\ H_2 &= \beta_{32} W_3 + \frac{c-1}{c}\beta_{12} W_1 \\ H_3 &= \frac{\partial W_3}{\partial u_3} + \frac{c-1}{c}\beta_{13} W_1 . \end{aligned}\right.$$

Soltanto si osserverà che ad esempio la trasformazione (19) diventa illusoria nel caso in cui il sistema triplo (u_1, u_2, u_3) di partenza sia quello speciale in cui la (a) è soddisfatta, cioè:

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost} .$$

In tal caso infatti, per le (6), (7) n. 2, risulta identicamente

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0 ,$$

cioè il sistema trasformato si riduce ad un punto.

Similmente, le formole di trasformazione (19′), diventano illusorie quando

$$W_2^2 + \frac{1}{1-c} W_3^2 = \text{cost} ;$$

e le (19″) quando sia

$$W_3^2 + \frac{c-1}{c} W_1^2 = \text{cost} .$$

Alle trasformazioni dei nostri sistemi tripli (u_1, u_2, u_3) definite dalle (19), (19′), (19″) sono da associarsi le loro inverse, nelle quali si suppone data una terna (qualunque) (H_1, H_2, H_3) di soluzioni del sistema (3) e si cerca una terna corrispondente (W_1, W_2, W_3) di soluzioni del sistema aggiunto (3*) che soddisfi inoltre alle (19), ovvero alle (19′), (19″). Si dimostra facilmente che l' inversione domandata è sempre possibile; anzi esistono ∞^1 di tali terne (W_1, W_2, W_3) che si determinano con una quadratura.

8. Veniamo da ultimo a descrivere la proprietà geometrica comune a tutti i sistemi tripli (u_1, u_2, u_3), colle rotazioni β_{ik} soddisfacenti al sistema (I), a cui sopra è accennato. Essa risulta dalla proposizione seguente:

Le superficie di ciascuna delle tre serie nel sistema triplo sono divise in parallelogrammi infinitesimi d'area costante da un doppio sistema di trajettorie isogonali delle loro linee di curvatura sotto un conveniente angolo.

Avvertiamo però subito che, mentre per una delle tre famiglie le dette trajettorie isogonali sono reali, per le altre due famiglie invece sono immaginarie, l'angolo costante d'inclinazione essendo per esse un immaginario (puro).

Le superficie dotate della proprietà sopra enunciata, di avere cioè per linee di curvatura le bisettrici di un doppio sistema (u, v) che dà al ds^2 la forma caratteristica

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

con

$$EG = 1 \quad , \quad F = \text{cost},$$

vennero considerate la prima volta in una mia Memoria del 1890 [1]. La proprietà è comune a tutte le superficie colla stessa rappresentazione sferica, e vale quindi in particolare per la sfera rappresentativa stessa. Qualunque superficie dotata della proprietà in discorso può inserirsi in sistemi tripli ortogonali della nostra classe.

Qui verifichiamo ad esempio che in ogni sistema triplo ortogonale corrispondente alle rotazioni date dalle (11) n. 4, quando θ, φ, ψ soddisfano al sistema (II), sulle superficie $u_3 = \text{cost}$, le trajettorie isogonali sotto l'angolo $\pm\sigma$ delle linee di curvatura dividono la superficie in parallelogrammi infinitesimi equivalenti. Basterà verificare che tale proprietà sussiste nell'immagine sferica, il cui ds'^2 è dato da

$$ds'^2 = \beta_{31}^2\,du_1^2 + \beta_{32}^2\,du_2^2 = \text{sen}^2\theta\,du_1^2 + \text{sen}^2\varphi\,du_2^2 .$$

Le equazioni differenziali delle trajettorie isogonali, sotto l'angolo $\pm\sigma$, delle linee di curvatura si scrivono

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\sigma}\,du_1 - \frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\sigma}\,du_2 = 0 \\ &\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\sigma}\,du_1 + \frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\sigma}\,du_2 = 0 . \end{aligned}\right.$$

[1] *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali.* (Annali di matematica. Serie II, tom. XVIII).

I primi membri di queste ammettono per le (II) i rispettivi fattori integranti $e^{-\psi}$, e^{ψ}, e se poniamo

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\int e^{-\psi}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\, du_1}{\cos\sigma} - \frac{\operatorname{sen}\varphi\, du_2}{\operatorname{sen}\sigma}\right) \\ v &= \frac{1}{2}\int e^{\psi}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\, du_1}{\cos\sigma} + \frac{\operatorname{sen}\varphi\, du_2}{\operatorname{sen}\sigma}\right) \end{aligned}\right.$$

ne risulta

$$\operatorname{sen}\theta\, du_1 = \cos\sigma\,(e^{\psi}\, du + e^{-\psi}\, dv)$$
$$\operatorname{sen}\varphi\, du_2 = \operatorname{sen}\sigma\,(-\, e^{\psi}\, du + e^{-\psi}\, dv)\,,$$

da cui quadrando e sommando

$$ds'^2 = e^{2\psi}\, du^2 + 2\cos 2\sigma\, du\, dv + e^{-2\psi}\, dv^2\,,$$

che ha appunto la forma caratteristica indicata con $EG = 1$, $F = \text{cost.}$

In generale il problema di trovare sulla sfera i doppî sistemi ortogonali di linee le cui trajettorie isogonali, sotto un conveniente angolo costante, dividono la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti si risolve nel modo geometrico più semplice ricorrendo alla teoria delle congruenze pseudosferiche (ved. m. c.). Con questa teoria vengono quindi a collegarsi gli attuali sistemi tripli ortogonali; ed anzi dalle trasformazioni di Bäcklund delle congruenze pseudosferiche (o ciò che torna lo stesso dal teorema di permutabilità) possono dedursi dei nuovi metodi di trasformazione pei nostri sistemi tripli ortogonali in altri della stessa specie, ma con diversa immagine sferica. Si è così ricondotti alla teoria dei *sistemi obliqui di Weingarten*, di cui tratta una mia Memoria del 1912 negli Annali di matematica (t. 19°, ser. 3ª). Ma gli sviluppi relativi a queste nuove trasformazioni oltrepasserebbero i limiti di una breve Nota e debbono venire riservati ad una pubblicazione ulteriore.

Anatomia-fisiologica. — *La dottrina dei moti delle sensitive. Note anatomo-fisiologiche* di A. Borzì e G. Catalano.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.