ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Il teorema di Eulero per le funzioni di linea omogenee.* Nota della dott.[ssa] ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. La funzione di linea $F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ è omogenea di grado r (r numero reale qualsiasi) se si ha:

$$F|[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]| = \mu^r F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$$

qualunque sia il valore del parametro μ.

Ammettiamo che la funzione F possa anche eventualmente avere (quando non sia detto esplicitamente il contrario) dei punti eccezionali $x_1 x_2 \dots x_n$, tali che la parte del primo ordine della variazione di F, corrispondente ad una variazione infinitesima $\delta f(x)$, data a $f(x)$ in tutto l'intervallo 01, abbia la forma:

$$\delta F = \int_0^1 F'|[(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi]|\,\delta f(\xi)\,d\xi + \sum_1^n{}_s A_s|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|\,\delta f(x_s) \text{ (1)}.$$

Le stesse ipotesi valgono per tutte le funzioni di linea che considereremo nei paragrafi successivi.

Dalla definizione seguono alcune delle proprietà di cui godono le funzioni di linea omogenee, proprietà corrispondenti a quelle delle funzioni omogenee di n variabili.

2. Sia data la funzione $F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ omogenea di grado r. Proponiamoci di calcolare il risultato che si ottiene sostituendo nel differenziale (o variazione prima) di F, a $\delta f(x)$ $f(x)$.

Per avere il differenziale di F basta calcolare

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda} F|[f(x) \overset{1}{\underset{0}{+}} \lambda\,\delta f(x)]|\right\}_{\lambda=0}.$$

Invece di fare prima questa derivazione e poi la detta sostituzione, possiamo sostituire senz'altro in $F|[f(x) \overset{1}{\underset{0}{+}} \lambda\delta f(x)]|$ a $\delta f(x)$ $f(x)$, e poi calcolare

(1) Sulle diverse specie di punti eccezionali di una funzione di linea, cfr. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, pag. 26 (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

la derivata rispetto a λ per $\lambda = 0$. Otterremo evidentemente lo stesso risultato. Basta dunque calcolare

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \cdot (1+\lambda) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} .$$

Ma poichè F è omogenea di grado r, si ha:

$$\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \,.\, (1+\lambda) \right] \right| = (1+\lambda)^r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| ,$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \, (1+\lambda) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} = r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Per le funzioni di linea si ha dunque il seguente teorema, corrispondente al teorema di Eulero pe le funzioni omogenee di n variabili:

Se nel differenziale di una funzione di linea omogenea, $\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$, *si sostituisce a* $\delta f(x)$ $f(x)$, *si ottiene la funzione stessa moltiplicata per il grado di omogeneità.*

Se $\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$ è una funzione senza punti eccezionali, si ha:

$$\delta \mathrm{F} = \int_0^1 \mathrm{F}' \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \, \xi \right] \right| \, \delta f(\xi) \, d\xi .$$

Dunque:

Una funzione di linea $\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$ *senza punti eccezionali, omogenea di grado* r, *soddisfa all'equazione alle derivate funzionali*:

$$\int_0^1 \mathrm{F}' \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \, \xi \right] \right| \, f(\xi) \, d\xi = r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Quest'ultimo risultato corrisponde al teorema di Eulero nella sua forma ordinaria. Il teorema precedentemente enunciato è più generale, poichè vale anche per le funzioni di linea con punti eccezionali della specie detta.

3. Verifichiamo ora se valga per le funzioni di linea anche il reciproco del teorema di Eulero.

Consideriamo una funzione di linea $\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$ tale che sostituendo nel suo differenziale a $\delta f(x)$ $f(x)$ si ottenga $r \cdot \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$; tale cioè che:

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \cdot (1+\lambda) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} = r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Evidentemente si avrà pure

$$(\mathrm{A}') \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \cdot (1+\lambda) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} = r\,\mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Per vedere come la funzione $\mathrm{F}|[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ dipenda da μ, calcoliamo la sua derivata rispetto a μ.

Come facilmente si verifica, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[(\mu+\lambda) \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} .$$

Ossia

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} .$$

Da quest'ultima uguaglianza e dalla (A′) segue:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| = \frac{r}{\mu} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Quindi:

$$\mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| = \mu^r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione di linea $\mathrm{F}|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ *sia omogenea di grado* r *è che sostituendo nel suo differenziale a* $\delta f(x)$ $f(x)$ *si ottenga la funzione stessa moltiplicata per* r.

Per una funzione senza punti eccezionali, tale condizione è equivalente all'altra di essere un integrale dell'equazione alle derivate funzionali:

$$\int_0^1 \mathrm{F}' \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\ \xi \right] \right| f(\xi)\, d\xi = r\,\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| \ (^1).$$

4. Dalla definizione stessa di funzione di linea omogenea, segue immediatamente che la più generale funzione di linea omogenea di grado r può ottenersi moltiplicando la più generale funzione di linea omogenea di grado zero per una particolare funzione di linea omogenea di grado r.

La più generale funzione di linea omogenea di grado zero è data da:

$$\Phi \left| \left[\frac{f(\overset{1}{\underset{0}{x}})}{\int_0^1 f(\xi)\, d\xi} \right] \right| \qquad (\Phi \text{ funzione arbitraria}) \ (^2).$$

(1) Per il caso $r = 0$, cfr. Volterra, *Sulle equazioni alle derivate funzionali*, § 2, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 15 marzo 1914.

(2) Volterra, loc. cit., § 2.

Possiamo dunque prendere come espressione generale di una funzione di linea omogenea di grado r la seguente:

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right| = \Phi\left|\left[\frac{f(\overset{1}{\underset{0}{x}})}{\int_0^1 f(\xi)\,d\xi}\right]\right| \cdot$$

$$\cdot \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 f^{r_1}(\xi_1)\, f^{r_2}(\xi_2) \ldots f^{r_s}(\xi_s)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_s$$

$$(\Phi \text{ funzione arbitraria};\ r_1 + r_2 + \cdots + r_s = r)\,.$$

Da quanto si è detto nei paragrafi precedenti, segue che, se Φ non ha alcun punto eccezionale nell'intervallo 01, la (I) ci dà l'integrale generale dall'equazione alle derivate funzionali:

$$\text{(II)} \qquad \int_0^1 \mathrm{F}'\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\ \xi\right]\right| f(\xi)\,d\xi = r\,\mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|\,.$$

Tutto quanto si è dimostrato per le funzioni di una sola linea si estende immediatamente alle funzioni di più linee.

5. L'equazione alle derivate funzionali

$$\text{(III)} \qquad \int_0^1 \mathrm{F}'\left|\left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\ \xi\right]\right| \theta(\varphi(\xi))\,d\xi = r\,\mathrm{F}\left|\left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$$

(F funzione incognita di linea, senza punti eccezionali; θ funzione ordinaria, nota) si può ricondurre alla (II) ponendo:

$$\text{(IV)} \qquad f(x) = e^{\int^{\varphi(x)} \frac{d\psi}{\theta(\psi)}}\,.$$

La (I) del paragrafo precedente (nell'ipotesi che Φ non abbia punti eccezionali) ci dà dunque, tenendo conto della (IV), l'integrale generale della (III).

Consideriamo ora l'equazione:

$$\text{(V)} \qquad \int_0^1 \Omega\left(\mathrm{F}'\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\ \xi\right]\right|\right) f(\xi)\,d\xi = r\,\mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$$

(Ω funzione ordinaria).

Poniamo $\mathrm{F}'\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\ \xi\right]\right| = p(\xi)$. Sostituiamo alle variabili $f(\xi)$ le variabili $p(\xi)$, e alla funzione $\mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$ la funzione $\Psi\left|\left[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$ definita dalla relazione:

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right| = \int_0^1 p(\xi)\, f(\xi)\,d\xi - \Psi\left|\left[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right| \ (^1).$$

(1) Questa trasformazione corrisponde a quella di Legendre per le funzioni di n variabili.

Se F non ha punti eccezionali, il suo differenziale è dato da

$$\delta \mathrm{F} = \int_0^1 p(\xi)\, \delta f(\xi)\, d\xi\,,$$

e per la (B) si ha:

$$\delta \Psi = \int_0^1 f(\xi)\, \delta p(\xi)\, d\xi\,.$$

Dunque:

$$\Psi' \left| \left[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi \right] \right| = f(\xi)\,.$$

Poniamo:

$$r\, p(\xi) - \Omega(p(\xi)) = \theta(p(\xi))\,.$$

La (V) si riduce allora, mediante la detta trasformazione, all'equazione:

$$\int_0^1 \Psi' \left| \left[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi \right] \right| \theta(p(\xi))\, d\xi = r\, \Psi \left| \left[p(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|\,.$$

Questa equazione è del tipo (III); di essa sappiamo dunque costruire, applicando il teorema di Eulero, l'integrale generale.

Costruito questo integrale, se si risolve rispetto a $p(x)$ l'equazione (di tipo integrale) $f(\xi) = \Psi' \left| \left[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi \right] \right|$ e si sostituisce nella (B) a p la sua espressione in funzione di f, si ha l'integrale generale della (V).

6. Si può anche ricondurre alla (II) (in cui sia posto $r = 1$) ogni equazione del tipo:

$$\text{(VI)} \qquad \int_0^1 \mathrm{F}' \left| \left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi \right] \right| \Theta \left| \left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi \right] \right| d\xi = \Psi \left| \left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| \mathrm{F} \left| \left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$$

(F funzione incognita senza punti eccezionali; Θ, Ψ funzioni note) quando di essa si conosca un'infinità continua d'integrali, ossia un integrale contenente un parametro che possa assumere tutti i valori compresi, per es., nell'intervallo 01.

Se $\mathrm{F}_0 \left| \left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \eta \right] \right|$ è il detto integrale, basta porre:

$$\text{(VII)} \qquad f(\eta) = \mathrm{F}_0 \left| \left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \eta \right] \right|\,.$$

La più generale funzione omogenea di primo grado, e senza punti eccezionali, dipendente da tutti i valori di $f(\eta)$ nell'intervallo 01 ci dà dunque, tenendo conto della (VII), l'integrale generale della (VI),

Questo risultato corrisponde all'altro, valido per le funzioni di n variabili: noti n integrali particolari di un'equazione alle derivate parziali del primo ordine, lineare ed omogenea rispetto alla funzione incognita e alle sue derivate, l'integrale generale è dato da un'arbitraria funzione omogenea di primo grado di quei n integrali.