ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Noi verremo così a fare i successivi errori

$$\varepsilon_1 = -\int_a^x \mathrm{K}\varphi d\xi \quad , \quad \varepsilon_2 = \int_a^x \mathrm{K}\,\varepsilon_1\, d\xi \quad , \quad \varepsilon_3 = \int_a^x \mathrm{K}\,\varepsilon_2\, d\xi\,, \ldots$$

Se riteniamo fissato un numero positivo ϱ, tale da superare $|\mathrm{K}|$ nelle vicinanze di a, e chiamiamo M il numero positivo fisso $\varrho\,\Phi$, allora noi sceglieremo l'ampiezza $(a\,, x)$ tale, per esempio, da non superare $0,1\,\mathrm{M}$; e perverremo ad una serie convergentissima, che esprimerà φ contenendo linearmente le incognite m_ν. La (3) ci darà allora il modo di avere n equazioni di primo grado fra le n incognite m_ν; queste si potranno ricavare da tale sistema.

Il metodo si estende agevolmente al caso che il nucleo non sia

$$p_1(x)\, q_1(\xi) + p_2(x)\, q_2(\xi) + \cdots + p_n(x)\, q_n(\xi)\,,$$

ma ne differisca per una funzione $\theta(x\,,\xi)$, la quale oscilli in limiti sufficientemente ristretti.

Lo svolgimento di ciò che qui abbiamo molto sinteticamente esposto, e l'estensione a casi alquanto più generali di quelli consentiti dalle nostre implicite ipotesi, costituiscono un facile lavoro, sul quale non vogliamo insistere. Mi preme soltanto stabilire che il mio metodo si estende benissimo anche alle equazioni con limiti variabili, e conduce ad una serie di agevole algoritmo, e convergente con rapidità che si può subito prestabilire.

Matematica. — *Sopra un'operazione funzionale atta a trasformare i potenziali logaritmici in simmetrici.* Nota della signorina LINA BIANCHINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Fra i potenziali binari (quelli cioè che si possono far dipendere da due sole coordinate) i logaritmici occupano un posto speciale, per le molteplici e semplici applicazioni di cui sono suscettibili, in quanto vi si può impiegare il metodo delle funzioni di variabile complessa, e trar partito dall'agile sussidio della rappresentazione conforme.

Per gli altri tipi, in particolare pei potenziali simmetrici, che sono altrettanto e forse più importanti dal punto di vista applicativo, pur potendosi definire le funzioni associate, come nel caso logaritmico, manca un analogo sussidio, onde è assai più ristretta la categoria di questioni che, per essi, si sanno risolvere in modo esauriente.

Stando così le cose, si presenta interessante indagare il legame fra le dette due specie di potenziali, nella mira di valersene per trasportare ai potenziali simmetrici alcuni dei risultati già conseguiti pei logaritmici.

In due Note (la presente e un'altra che le farà tosto seguito) sorte da un suggerimento del prof. Levi-Civita, mi propongo di far vedere come vi sia corrispondenza biunivoca fra le coppie (reali e regolari) di funzioni associate simmetriche (u, v) e le coppie (pure reali) di funzioni associate logaritmiche (φ, ψ), vincolate alla condizione $\psi = 0$ sulla retta, che è asse di simmetria per (u, v).

In altri termini ogni funzione di variabile complessa $\varphi + i\psi$, reale sull'asse reale, dà luogo ad una coppia (u, v), e reciprocamente.

L'espressione analitica di tale corrispondenza (funzionale lineare) è fornita da integrali definiti semplici, e invertibili in modo semplice, mercè il teorema di Abel. A ciò si perviene combinando opportunamente la formula di Whittaker, che dà l'integrale generale dell'equazione di Laplace [1], con altre già rilevate dal Beltrami [2]. Immediato corollario della corrispondenza funzionale, or ora specificata, è l'esistenza, per i potenziali simmetrici, di un gruppo di trasformazioni che ha la stessa generalità del gruppo conforme. La sua natura funzionale ne rende però assai meno efficace l'impiego di quel che non avvenga nel caso logaritmico. Per la stessa ragione i problemi al contorno, relativi ad una specie di potenziali, non si trasformano, almeno in generale, per effetto delle formule di corrispondenza, in problemi analoghi relativi all'altra specie. Così l'obbiettivo, di portare, mediante trasformazioni, la teoria dei potenziali simmetrici allo stesso grado di sviluppo consentito dai logaritmici, non sarà completamente raggiunto, ma qualche caso, come, ad es., il problema del disco, di cui mi occuperò in Note successive, offrirà una facile e vantaggiosa applicazione.

1. — Richiamo e nuova dimostrazione della formula di Whittaker.

La più generale soluzione (regolare in un certo campo S) dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

può essere rappresentata con una espressione del tipo

$$(1) \qquad u = \int_0^{2\pi} f(z + ix\cos\lambda + iy\,\mathrm{sen}\,\lambda, \lambda)\,d\lambda = \int_0^{2\pi} f(l, \lambda)\,d\lambda,$$

[1] Whittaker, *On the partial differential equations of math. physics*, Mathematische Annalen, 57 Band, 1903.

[2] Beltrami, Opere matematiche, tomo 3°, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*. E ibid., *Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni*. Debbo notare che già il prof. Burgatti nella sua Nota, *Sui potenziali binarii* (Rend. della R. Accad. di Bologna, 1909), aveva ricavato un'espressione dei potenziali simmetrici dalla formula di Whittaker, senza però trattare la questione che forma oggetto del presente scritto.

dove f è una funzione generica dei due argomenti

$$l = z + ix \cos\lambda + iy \operatorname{sen}\lambda \quad \text{e} \quad \lambda,$$

periodica rispetto a λ col periodo 2π e regolare per valori reali di λ.

La dimostrazione di questo importante risultato può darsi, in modo alquanto diverso da quello indicato da Whittaker, ricorrendo alla rappresentazione di una qualsivoglia funzione armonica u, regolare entro un campo S, mediante la formula

$$(2) \qquad u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{du}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

dove σ designa il contorno di S, n la sua normale in un punto generico ξ, η, ζ del contorno stesso, ed r la distanza fra il punto potenziato (x, y, z), e il punto potenziante (ξ, η, ζ).

Basta all'uopo osservare con Whittaker che si ha identicamente:

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{l - \Lambda},$$

dove, come s'è detto,

$$l = z + ix \cos\lambda + iy \operatorname{sen}\lambda;$$

e

$$\Lambda = \zeta + i\xi \cos\lambda + i\eta \operatorname{sen}\lambda,$$

talchè in primo luogo il potenziale elementare $\frac{1}{r}$ rimane effettivamente definito dalla (1), prendendovi per f

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l - \Lambda}.$$

Ne consegue, chiamando α, β, γ i coseni direttori della normale n,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\alpha + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\beta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{i\alpha\cos\lambda + i\beta\operatorname{sen}\lambda + \gamma}{(l - \Lambda)^2}\, d\lambda.$$

Tale derivata risulta pure nel tipo (1), essendo

$$f = f_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{i\alpha\cos\lambda + i\beta\operatorname{sen}\lambda + \gamma}{(l - \Lambda)^2}$$

Sostituendo nella (2) in luogo di $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ e di $\frac{1}{r}$ i loro valori, e invertendo le integrazioni rispetto a λ e a σ, risulta senz'altro che, per la u generica, si ha

$$f = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(u f_2 - \frac{du}{dn} f_1\right) d\sigma ,$$

quindi essa è rappresentabile sotto la forma (1),

c. d. d.

2. — Corollario relativo ai potenziali simmetrici.

La dimostrazione testè esposta ha il vantaggio di fornire, con metodo analogo, anche la più generale espressione di un potenziale simmetrico, attorno all'asse delle z, sotto la forma

$$u = \int_0^{2\pi} f(z + ix\cos\lambda + iy \operatorname{sen}\lambda)\, d\lambda = \int_0^{2\pi} f(l)\, d\lambda , \tag{4}$$

che non differisce dalla (1) se non per il fatto che f va ritenuto indipendente da λ.

Per rendersene conto conviene riprendere la (2), nell'ipotesi che vi sia simmetria rispetto all'asse Oz: ben s'intende sia per il potenziale u, che per la superficie σ, entro la quale lo si suppone regolare.

Si indichi con s un generico meridiano di σ, con ds il relativo elemento (circostante al generico punto potenziante ξ, η, ζ) e si ponga

$$x = \varrho \cos\omega \quad , \quad y = \varrho \operatorname{sen}\omega \ ,$$
$$\xi = \varrho_1 \cos\omega_1 \quad , \quad \eta = \varrho_1 \operatorname{sen}\omega_1 \ .$$

Manifestamente $u(x, y, z)$ dovrà risultare funzione dei soli argomenti ϱ e z; e del pari $u(\xi, \eta, \zeta)$, $\frac{du}{dn}$ dipenderanno dai soli argomenti ϱ_1 e ζ.

Con ciò (essendo indipendente da ω_1 anche il simbolo di derivazione rapporto ad n), l'integrale che sta nel secondo membro della (2) potrà essere scritto:

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma ds \left\{ u \frac{d}{dn}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, d\omega_1 - \frac{du}{dn}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\, d\omega_1 \right\} . \tag{5}$$

Ora se nell' $\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\, d\omega_1$ (potenziale d'una circonferenza omogenea) sostituiamo per $\frac{1}{r}$ il valore dato dalla (3), e invertiamo le integrazioni rispetto a λ e ad ω_1, si ha:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, d\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\omega_1}{l - \Lambda},$$

ove

$$\Lambda = \varrho_1 \{ 1 + i \cos(\omega_1 - \lambda) \}.$$

In luogo di ω_1, assumiamo come variabile di integrazione $\tau = \omega_1 - \lambda$. Verrà

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega_1}{l - \Lambda} = \int_\lambda^{2\pi+\lambda} \frac{d\tau}{l - \varrho_1(1 + i \cos\tau)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{l - \varrho_1(1 + i\cos\tau)},$$

da cui risulta che l' $\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, d\omega_1$, è rappresentabile sotto la forma (1) senza che f dipenda esplicitamente da λ. Se ne inferisce che anche l'espressione (5) di u appartiene in definitiva allo stesso tipo (4),

c. d. d.

Rimane pertanto acquisito (posto, nella (4), $x = \varrho \cos\omega$, $y = \varrho$ sen ω, e assunta $\lambda - \omega = \vartheta$ al posto di λ come variabile corrente d' integrazione) che ogni potenziale simmetrico $u(z, \varrho)$ può porsi sotto la forma:

$$\int_0^{2\pi} f(z + i\varrho \cos\vartheta)\, d\vartheta.$$

Scrivendo materialmente x al posto di z, e y al posto di ϱ, con che, nel piano rapresentativo (x, y), Ox funge da asse di simmetria, si ha per i potenziali in questione, cioè per un qualsiasi integrale regolare dell'equazione

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

l'espressione

$$u = \int_0^{2\pi} f(x + iy \cos\vartheta)\, d\vartheta.$$

L'integrale del secondo membro può essere ridotto all'intervallo $0, \pi$. Infatti:

$$u = \int_0^{2\pi} f d\vartheta = \int_0^{\pi} f d\vartheta + \int_\pi^{2\pi} f(x + iy\cos\vartheta)\, d\vartheta,$$

e, posto nel secondo integrale $\vartheta' = 2\pi - \vartheta$, è

$$u = \int_0^{\pi} f d\vartheta \quad \int_\pi^{0} f(x + iy \cos\vartheta')\, d\vartheta'.$$

Ossia

$$u = \int_0^{\pi} f(x + iy\cos\vartheta)\, d\vartheta,$$

qualora s' indichi ancora con f la funzione, *a priori* arbitraria, $2f$.

3. — La funzione coniugata v.

Dalle equazioni di coniugio relative alle funzioni associate simmetriche

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = y \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -y \dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

si ricava in primo luogo

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i \int_0^\pi f' y \cos \vartheta \, d\vartheta ,$$

f' designando la derivata di f rispetto al suo argomento $x + iy \cos \vartheta$.

Ne consegue

$$v = -i \int_0^\pi f y \cos \vartheta \, d\vartheta + \mathrm{Y}, \tag{6}$$

dove Y è costante rispetto ad x, e quindi *a priori* una funzione della sola y. Vedremo ora che Y risulta costante anche rispetto ad y. Infatti, dalla (6) si ha

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -i \int_0^\pi f \cos \vartheta \, d\vartheta + \int_0^\pi y \cos^2 \vartheta \, f' d\vartheta + \mathrm{Y}',$$

e siccome, per la prima equazione di coniugio,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \int_0^\pi y f' d\vartheta ,$$

così (scrivendo $1 - \operatorname{sen}^2 \vartheta$ al posto di $\cos^2 \vartheta$) si ricava

$$-i \int_0^\pi f \cos \vartheta \, d\vartheta - \int_0^\pi y \operatorname{sen}^2 \vartheta \, f' \, d\vartheta + \mathrm{Y}' = 0 .$$

Ma

$$- \int_0^\pi y \operatorname{sen}^2 \vartheta \, f' \, d\vartheta = -i \int_0^\pi \frac{df}{d\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= [-i f \operatorname{sen} \vartheta]_0^\pi + i \int_0^\pi f \cos \vartheta \, d\vartheta = i \int_0^\pi f \cos \vartheta \, d\vartheta ,$$

per conseguenza

$$\mathrm{Y}' = 0 ,$$

c. d. d.

La costante additiva Y è inessenziale. Potremo quindi assumerla senz'altro eguale a zero, e avremo complessivamente le cercate espressioni funzionali d'ogni coppia di associate simmetriche sotto la forma:

$$\begin{cases} u = \displaystyle\int_0^\pi f(x + iy \cos \vartheta) \, d\vartheta , \\ v = -i \displaystyle\int_0^\pi f(x + iy \cos \vartheta) \, y \cos \vartheta \, d\vartheta . \end{cases} \tag{7}$$