ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Fisica matematica. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno d'un corpo in corrispondenza a un'assegnata azione esterna.* Nota di Corradino Mineo, presentata dal Socio P. Pizzetti.

1. Il chmo prof. Pizzetti, in una sua fondamentale Memoria *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra* (1), ha stabilito parecchi metodi per costruire corpi d'attrazione esterna nulla, relativi allo spazio τ limitato da una superficie chiusa S. Uno si fonda su questa semplicissima considerazione. Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua in τ, insieme con le sue derivate prime, e dotata inoltre di derivate seconde atte all'integrazione in τ: allora condizione necessaria e sufficiente affinchè la f sia la funzione potenziale *interna* d'un corpo situato dentro τ, che non esercita azione newtoniana all'esterno, è che essa si annulli insieme con la sua derivata normale in ogni punto del contorno S; e la densità del corpo sarà data da $\Delta_2 f : -4\pi$.

In particolare, se

$$s = 0 \tag{1}$$

è l'equazione della S, e u una funzione arbitraria dei punti di τ, saranno corpi d'attrazione esterna nulla quelli dentro τ la cui densità è espressa dalla funzione $\Delta_2(us^2)$ (2).

Nel caso che il corpo situato in τ eserciti un'azione esterna non nulla, il compianto prof. Lauricella — che anch'egli, dopo il Pizzetti, s'ebbe a occupare della questione — mostrò come, prestabilita l'azione esterna, si possa costruire la più generale funzione potenziale interna del corpo, e quindi la più generale densità, servendosi della seconda funzione del Green (3).

Ora noi vogliamo mostrare come, modificando in modo molto semplice la fondamentale considerazione del Pizzetti, si possano per altra via ottenere quante si vogliano distribuzioni della massa, corrispondenti a un'assegnata azione esterna non nulla.

(1) Annali di matematica pura ed applicata, tomo XVII, 1910, pp. 225-258.

(2) Per un'estensione di questo risultato, vedi Crudeli, *I corpi d'attrazione nulla*, questi Rendiconti, vol. XXI, 1912, fasc. 7°. Noi qui ci limitiamo al caso che u e s sieno funzioni continue, insieme con le derivate prime, in tutto il dominio τ, compresa la frontiera S, e che inoltre ammettano derivate seconde atte all'integrazione in τ.

(3) Lauricella, *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna*, questi Rendiconti, vol. XX, 1911, fasc. 2°.

2. Sia

(2) $$r = \mathrm{MP}$$

la distanza tra un punto qualunque M della S e un punto P del dominio τ (non esclusa la frontiera). Sia sempre (1) l'equazione della S e u una funzione dei punti di τ. Applicando alla funzione us la seconda formola del Green, risulta facilmente

(3) $$\int_\tau \frac{\Delta_2(us)}{r}\,d\tau = \int_{\mathrm{S}} \left(us \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d}{dn}(us) \right) d\mathrm{S}\,,$$

dove il verso positivo della normale è quello della semiretta penetrante in τ. Ma sulla S è $us = 0$; poi potremo supporre (cambiando eventualmente di segno la s) che i coseni della fissata direzione positiva della normale siano dati da

(4) $$\cos\widehat{ns} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}}\frac{\partial s}{\partial x}\,,\quad \cos\widehat{ny} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}}\frac{\partial s}{\partial y}\,,\quad \cos\widehat{nz} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}}\frac{\partial s}{\partial z}\,,$$

ritenendo presa la determinazione positiva del radicale ed essendo

(5) $$\Delta_1 s = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 .$$

Allora la (3) si scrive

(6) $$\int_\tau \frac{\Delta_2(us)}{r}\,d\tau = \int_{\mathrm{S}} \frac{u\sqrt{\Delta_1 s}}{r}\,d\mathrm{S}\,.$$

Questa mostra che *una massa distribuita in* τ *con densità* $\Delta_2(us)$ *esercita la stessa azione esterna che se distesa in semplice strato sul contorno* S *con densità* $u\sqrt{\Delta_1 s}$.

Nota dunque in superficie la funzione potenziale V del corpo, cioè nota la sua azione esterna, se riesciamo a risolvere l'equazione integrale di prima specie del tipo Fredholm

(7) $$\int_{\mathrm{S}} \frac{\varrho(\mathrm{P})}{r}\,d\mathrm{S} = \mathrm{V}(\mathrm{M})\,,$$

avremo la densità ϱ del semplice strato superficiale, che esercita l'assegnata azione esterna; poi, posto

(8) $$u_s = \frac{\varrho}{\sqrt{\Delta_1 s}}\,,$$

non avremo che a prolungare in τ, con legge qualunque, la funzione u_s dei punti della S: se u è un tal prolungamento, cioè una funzione continua dei punti di τ, che sul contorno coincide con u_s, allora

$$h = \Delta_2(us) \tag{9}$$

è la densità d'un corpo situato in τ, che esercita l'assegnata azione esterna.

3. La questione è dunque ricondotta a risolvere l'equazione integrale (7). Poniamo

$$\mathrm{W(M)} = \int_{\mathrm{S}} \frac{\varrho(\mathrm{P})}{r}\, d\mathrm{S}\,, \tag{10}$$

dove intenderemo ora che M sia un punto qualunque dello spazio, e P un punto variabile della S. Distingueremo, poi, al solito, con l'indice e i valori d'una funzione in punti esterni alla S; con l'indice i, i valori della funzione in punti interni della S. Essendo V la funzione potenziale del nostro corpo, dalle (7) e (10) segue subito

$$\mathrm{W}_e = \mathrm{V}_e\,. \tag{11}$$

Per le note proprietà delle funzioni potenziali di semplice strato, abbiamo

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{W}_e}{dn} - \frac{d\mathrm{W}_i}{dn} = 4\pi\varrho(\mathrm{M})\,, \\ &\frac{d\mathrm{W}_e}{dn} + \frac{d\mathrm{W}_i}{dn} = 2\int_{\mathrm{S}} \varrho(\mathrm{P})\,\frac{\cos\psi}{r^2}\, d\mathrm{S}\,; \end{aligned}\right. \tag{12}$$

dove M è un determinato punto della S, nel quale s'intendono calcolate le due derivate normali, e ψ è l'angolo della retta MP con la seminormale positiva (n. 2) in M alla S. Dalle (11) e (12) segue

$$\frac{d\mathrm{V}_e}{dn} = 2\pi\varrho(\mathrm{M}) + \int_{\mathrm{S}} \varrho(\mathrm{P})\,\frac{\cos\psi}{r^2}\, d\mathrm{S}\,. \tag{13}$$

Se dunque si suppone nota l'azione esterna del corpo, e quindi la derivata normale $\frac{d\mathrm{V}_e}{dn}$, la ricerca di ϱ si può anco far dipendere dalla (13), vale a dire da un'equazione integrale di Fredholm di seconda specie. Essa ammette sempre un'unica soluzione continua, giacchè l'equazione omogenea relativa, per le note proprietà delle funzioni potenziali, non può ammettere che la soluzione identicamente nulla. E la soluzione di (13) è soluzione di (7): anzi ne è l'unica, giacchè il nucleo della (7) è chiuso.

4. Notiamo due casi particolari semplicissimi.

Se la S è di livello per il corpo, allora, essendo M un punto qualunque di S, è

$$\mathrm{W(M)} = \mathrm{V(M)} = \text{costante},$$

e quindi W è pure costante (perchè armonica in τ); sicchè dalla prima delle (12) segue subito, badando alla (11):

$$\varrho(\mathrm{M})=\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathrm{V}_e}{dn},$$

come è risaputo.

5. Supponiamo in secondo luogo che la S sia una sfera di raggio a col centro nell'origine delle coordinate. Allora

$$\cos\psi=\frac{r}{2a},$$

e la (13) diviene

$$\frac{d\mathrm{V}_e}{dn}=2\pi\varrho+\frac{\mathrm{V}_s}{2a},$$

che non è altro se non l'equazione di Lagrangia. Se ne deduce

$$\varrho=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\mathrm{V}_e}{dn}-\frac{\mathrm{V}_s}{2a}\right); \tag{14}$$

sicchè il nostro problema è per la sfera interamente risoluto.

6. Ma possiamo anco risolvere col nostro metodo un caso importante per la Geodesia, già altrimenti risoluto dal prof. Pizzetti; cioè quello d'un pianeta, che ammetta come *superficie d'equilibrio* esteriore un ellissoide a tre assi d'equazione

$$s=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{15}$$

sia inoltre dotato d'un moto rotatorio uniforme, di velocità angolare ω, intorno a uno dei tre assi, per es. intorno all'asse z, e abbia una massa totale M conosciuta. In questo caso, infatti, si deve avere in superficie

$$f\mathrm{V}_s+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=\mathrm{C}, \tag{16}$$

dove f è la costante dell'attrazione, e C un'altra costante, che, per le ipotesi fatte, resta univocamente determinata (teorema di Stokes). Ne segue che la risoluzione della (7) è ridotta in questo caso a quella d'un doppio problema di Dirichlet, esterno e interno, rispetto all'ellissoide (15): cioè alla ricerca di due funzioni armoniche W_e e W_i, la prima all'esterno, e la seconda all'interno dell'ellissoide, e che in superficie si riducano a

$$\frac{1}{f}\left(\mathrm{C}-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right);$$

dopo di che, la prima delle (12) dà ϱ, e si può applicare il procedimento del n. 2.

Questo doppio problema si risolve elegantemente per mezzo delle funzioni armoniche ellissoidali del Morera [1].

Allora la funzione W_e è quella già costruita dal Pizzetti, cioè

$$W_e = V_e = \frac{M}{2} K + k_1 v_1 + k_2 v_2 , \tag{17}$$

essendo K, v_1, v_2 tre determinate funzioni armoniche nello spazio esterno all'ellissoide, e k_1, k_2 due certe costanti [2].

Quanto alla W_i, essa è data dalla formola

$$W_i = \frac{M}{2} K^{(0)} + k_1 v_1^{(0)} + k_2 v_2^{(0)} + \varepsilon [v_1^{(0)} + v_2^{(0)} + v_3^{(0)}] , \tag{18}$$

dove $K^{(0)}, v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}$ sono quel che diventano K, v_1, v_2 e l'analoga v_3, quando in esse, invece della maggior radice della nota equazione cubica, si metta lo zero; mentre la costante ε è data così

$$\varepsilon = \frac{c^2(k_1 b^2 + k_2 a^2)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \tag{19}$$

Se si calcola ora la differenza delle derivate normali delle due funzioni (17) e (18) e si bada alla prima delle (12), si ottiene senza difficoltà

$$\varrho = \frac{1}{4\pi abc} \left\{ \left(M - 4k_1 \frac{x^2}{a^4} - 4k_2 \frac{y^2}{b^4} \right) p - \frac{4\varepsilon}{p} \right\} , \tag{20}$$

essendo p la distanza dal centro del piano tangente all'ellissoide in un suo punto.

La (8) diventa nel caso della (15):

$$u_s = \frac{1}{8\pi abc} \left\{ \left(M - 4k_1 \frac{x^2}{a^4} - 4k_2 \frac{y^2}{b^4} \right) p^2 - 4\varepsilon \right\} . \tag{21}$$

Si tratta ora di prolungare la u_s all'interno dell'ellissoide. Per avere

[1] Vedi Morera, *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti* ecc., questi Rendiconti, vol. III, 1894, fasc. 8°; e per una teoria autonoma di queste importanti funzioni del Morera, vedi una Nota del prof. Somigliana, nel Circ. mat. di Palermo, tom. XXXI, 1911, fasc. 3°.

[2] Cfr. Pizzetti, *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*. Pisa, Spoerri, 1913, pp. 69-71.

densità spaziali finite in tutto τ, notiamo che p^2, tenuto conto della (15), si può scrivere così

$$p^2 = \frac{a^4 b^4 c^2}{a^4 b^4 - (a^2 - c^2)\, b^4 x^2 - (b^2 - c^2)\, a^4 y^2} \tag{22}$$

e questa è una funzione continua in tutto τ.

Si può allora prendere in τ:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi abc}\left(\frac{p^2}{4}\,\mathrm{D} - \varepsilon\right), \tag{23}$$

essendo

$$\mathrm{D} = \mathrm{M} - 4\left(k_1 \frac{x^2}{a^4} + k_2 \frac{y^2}{b^4}\right). \tag{24}$$

In conseguenza si potrà avere una distribuzione di massa nell'interno dell'ellissoide — e quindi infinite (n. 1) — compatibilmente all'assegnata azione esterna, prendendo come densità la funzione $h_1 = \Delta^2(u_1 s)$. Si trova

$$\begin{aligned}\pi abc\, h_1 = {} & \left(\frac{\mathrm{D}}{4}\, p^2 - \varepsilon\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 4p^2\left(\frac{k_1 x^2}{a^6} + \frac{k_2 y^2}{b^6}\right) + \\ & + \mathrm{D}p^4\left(\frac{\alpha x^2}{a^6} + \frac{\beta y^2}{b^6}\right) - p^2 s\left(\frac{k_1}{a^4} + \frac{k_2}{b^4}\right) - 4p^4 s\left(\frac{k_1 \alpha x^2}{a^8} + \frac{k_2 \beta y^2}{b^8}\right) + \\ & + \frac{\mathrm{D}p^4 s}{4}\left(\frac{\alpha}{a^4} + \frac{\beta}{b^4}\right) + \mathrm{D}p^6 s\left(\frac{\alpha^2 x^2}{a^8} + \frac{\beta^2 y^2}{b^8}\right),\end{aligned} \tag{25}$$

essendo

$$\alpha = \frac{a^2 - c^2}{c^2}, \quad \beta = \frac{b^2 - c^2}{c^2}. \tag{26}$$

Se l'ellissoide è di rotazione intorno a z, non c'è che da fare $a = b$ e $k_1 = k_2$; la V_e, data dalla (17), si riduce a quella calcolata dal prof. Pizzetti; la legge di distribuzione della massa, in questo caso, è abbastanza semplice, ecc. Il caso della sfera si ottiene facendo, in tutte le formole, $a = b = c$: peraltro si ottiene più immediatamente partendo dalla (14) del n. 5.