ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica.* Nota I di RUGGIERO TORELLI, presentata dal Socio E. BERTINI.

In questo lavoro, dopo avere brevemente ricordata la rappresentazione analitica di una corrispondenza algebrica fra due curve (§ 1), scrivo certe relazioni cui soddisfano i periodi normali degli integrali normali di prima specie relativi a due curve $C_p\,\overline{C}_p$ di genere p, allorquando esse sono birazionale identiche (teorema I); e mostro poi come parte di queste relazioni siano sufficienti per dedurre l'identità birazionale di $C_p\,\overline{C}_p$ (teorema II). Ciò getta qualche luce sulle incognite relazioni di Riemann che legano i periodi normali relativi a una curva.

Enuncio poi una condizione necessaria e sufficiente, relativa sempre ai periodi di $C_p\,\overline{C}_p$, perchè queste due curve abbiano la stessa varietà di Jacobi (teorema III); e ciò mi dà occasione di ritrovare un teorema del Severi in proposito.

Per esporre gli altri risultati, premetto qualche spiegazione.

A) Siano $V_\rho, \overline{V}_\rho$ le varietà delle ϱ-ple di punti di due curve $C_p\,\overline{C}_p$ ($\varrho \leq p$). Dicendo ciò, intendiamo che siano state *fissate* le corrispondenze fra i punti di $V_\rho\,\overline{V}_\rho$ e le ϱ-ple di punti di $C_p\,\overline{C}_p$; e che, se C_p è sovrapposta a $\overline{C}_p$, sia V_ρ sovrapposta a $\overline{V}_\rho$, e le due dette corrispondenze coincidano.

Se fra $C_p\,\overline{C}_p$ intercede una corrispondenza biunivoca, questa fa corrispondere biunivocamente le ϱ-ple di punti di C_p a quelle di $\overline{C}_p$, inducendo così una ben determinata corrispondenza biunivoca fra $V_\rho\,\overline{V}_\rho$. Quest'ultima, e quelle da essa dedotte moltiplicandola per trasformazioni *ordinarie* [1] in sè di $V_\rho\,\overline{V}_\rho$, si diranno *associate* alla data corrispondenza biunivoca fra le due curve.

B) Consideriamo nella varietà di Jacobi V_p, relativa a una curva C_p, la varietà ∞^ρ imagine delle p-ple di punti di C_p con $p-\varrho$ punti fissi arbitrarî. Applicando a tal varietà tutte le trasformazioni ordinarie di V_p in sè, si hanno ∞^p varietà che chiameremo brevemente *varietà* W_ρ. Le W_ρ

[1] Una corrispondenza biunivoca fra le ϱ-ple di punti di una curva C_p di genere $p \geq \varrho$ si dice *ordinaria di 1ª o 2ª specie*, quando la differenza o la somma di ϱ-ple omologhe varia in una serie lineare. Se $\varrho = p-1$, ovvero se C_p è iperellittica, esiste *una* corr. ordinaria (che è di 2ª specie); se $\varrho < p-1$ e C_p non è iperellittica, non esistono corr. ordinarie.

Una corr. non ordinaria dicesi *singolare*.

costituiscono *un* sistema ∞^p se $\varrho = p-1$, ovvero se C_p è iperellittica; *due* sistemi ∞^p negli altri casi.

C) Entro una varietà V_k chiameremo *carattere d'immersione* di una V_{k-1} il numero dei punti comuni ad essa e a $k-1$ varietà canoniche. Il carattere d'immersione delle V_{k-1} di un sistema continuo si calcola facilmente mediante gli *invarianti* Ω_0 (grado del sistema canonico) delle V_{k-1} stesse e delle varietà comuni a 2, a 3, ..., a k delle V_{k-1} (per un gruppo di n punti si assume $\Omega_0 = n$; per una curva di genere p si assume $\Omega_0 = 2p-2$) (¹).

Ciò posto, nel § 5 io dimostro il seguente

TEOREMA IV. — *Nella varietà jacobiana V_p di una curva C_p si abbia una varietà V_ϱ bir. identica alla varietà delle ϱ-ple di punti di un'altra curva $\overline{C}_p$, e tale che nessun integrale di 1ª specie di V_p resti costante su di essa. Se le W_{p-1} di V_p segano su tal V_ϱ varietà aventi il carattere di immersione*

$$p\sum_{k=0}^{\varrho-2}(2p-\varrho-2-k)\binom{\varrho-2}{k}(p-\varrho-1)^{\varrho-2-k}\times$$
$$\times(p-1)(p-2)\dots(p-k),$$

allora le curve $C_p\,\overline{C}_p$ sono bir. identiche, e la V_ϱ è una varietà W_ϱ.

Da questo teorema seguono subito gli altri due:

TEOREMA V. — *Se fra le varietà di Jacobi $\overline{V}_p\,V_p$ di due curve $\overline{C}_p\,C_p$ intercede una corrispondente biunivoca che muti una W_ϱ di $\overline{V}_p$ in una W_ϱ di V_p, tal corrispondenza è associata a una corrispondenza biunivoca fra $\overline{C}_p\,C_p$* (²).

TEOREMA VI. — *Se fra le varietà delle ϱ-ple di punti di due curve $C_p\,\overline{C}_p$ ($\varrho < p$) intercede una corrispondenza biunivoca, questa è associata a una corrispondenza biunivoca fra $C_p\,\overline{C}_p$.*

(¹) Chiamando $\Omega_0^{(1)}\,\Omega_0^{(2)}\dots\Omega_0^{(k)}$ i detti invarianti Ω_0 (talchè $\Omega_0^{(k)}$ è il *grado* delle V_{k-1}), si ha per es.:

per $k=2$: car. immers. $=\Omega_0^{(1)}-\Omega_0^{(2)}$;

per $k=3$: car. immers. $=\Omega_0^{(1)}-2\Omega_0^{(2)}+3\Omega_0^{(3)}$;

e si calcola subito, per induzione, la formula generale.

(²) Nel caso $\varrho = p-1$, questo teorema è stato recentemente dimostrato dal Comessatti [Atti Accad. Torino, vol. 50, 1914-15]; e allora può anche (come lo stesso Comessatti avverte) dedursi immediatamente dal mio teorema ricordato al principio del n. 7. Basta osservare che alla curva di $\overline{V}_p$, imagine delle p-ple di punti di $\overline{C}_p$ con $p-1$ punti fissi arbitrarî, la corrispondenza di cui parla l'enunciato del teorema V (postovi $\varrho = p-1$) fa corrispondere una curva di V_p che incontra in p punti le W_{p-1}; e applicare il mio ricordato teorema.

Quest'ultimo è poi essenziale anche per la dimostrazione del teorema V.

Da questi due teoremi, supponendo che le curve $C_p \bar{C}_p$ siano sovrapposte, segue che

Se la varietà jacobiana di una curva C_p *possiede una trasformazione singolare che muti in sè la totalità delle* W_ρ, *tal trasformazione è associata a una trasformazione birazionale singolare* [1] *di* C_p *in sè.*

Se la varietà delle ϱ*-ple di punti di una curva* C_p *possiede una trasformazione singolare in sè, questa è associata a una trasformazione birazionale singolare in sè di* C_p.

§ 1. — Rappresentazione analitica di una corrispondenza algebrica fra due curve.

1. Sia C_p una curva di genere p; y un suo punto variabile. Possiamo rappresentare i punti y mediante i punti di una ciambella con p buchi R: siano $A_i B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ le p retrosezioni su R; $v_i(y)$ i p integrali normali di 1ª specie; τ_{ik} il periodo di $v_i(y)$ lungo B_k $(\tau_{ik} = \tau_{ki})$. Osserviamo subito che, data C_p, la corrispondenza fra i suoi punti e quelli di R non è determinata in modo unico; nè, per conseguenza, sono determinati univocamente gli $\frac{1}{2}p(p+1)$ numeri τ_{ik}. Il sistema dei τ_{ik} si dirà brevemente un *sistema di periodi normali di* C_p.

Sia poi $\bar{C}_p$ un'altra curva di genere p; x un suo punto variabile; $\bar{R}, \bar{A}_i \bar{B}_i$, $u_i(x)$, a_{ik} enti analoghi ai precedenti, e relativi a $\bar{C}_p$.

Supponiamo che tra $C_p \bar{C}_p$ interceda una corrispondenza $(n\nu)$ che, pensata come operazione che porta da un punto di $\bar{C}_p$ a n punti di C_p, chiameremo S; sia $y' y'' \ldots y^n$ il gruppo degli omologhi del punto x di $\bar{C}_p$. Allora si hanno le classiche p relazioni di Hurwitz

$$(1) \qquad v_k(y') + \cdots + v_k(y^n) = \sum_i \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \text{ [2]},$$

dove le π_k sono costanti e le π_{kl} verificano le eguaglianze

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki} \\ \sum_i \pi_{ki}\, a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\, \tau_{ki}, \end{array} \right.$$

gli $h\,g\,H\,G$ essendo numeri interi (*intieri caratteristici* di S).

[1] Le sole corrispondenze biunivoche non singolari, su curve di genere $p > 1$, sono quelle date dalle g_2^1 delle curve iperellittiche.

[2] In tutte le formule, quando non sia esplicitamente notato il contrario, gli indici di sommazione variano da 1 a p.

Da queste si traggono le p^2 relazioni

$$(2') \qquad \sum_{ji} g_{ji}\,\tau_{kj}\,a_{il} + \sum_i h_{ki}\,a_{il} - \sum_i G_{il}\,\tau_{ki} - H_{kl} = 0\,.$$

Se la corrispondenza S non è a valenza zero, i numeri π_{kl} non sono tutti nulli: e viceversa. E si noti che, com'è facile vedere, i numeri π_{kl} sono tutti nulli se, e solo se, lo sono i numeri $h\,g\,H\,G$.

2. Per l'operazione S^{-1} (inversa della S), che porta da un punto y di C_p ai suoi omologhi $x'\,x''\,...\,x^{\nu}$, avremo similmente

$$u_k(x') + \cdots + u_k(x^{\nu}) = \sum_i \bar{\pi}_{ki}\,v_i(y) + \bar{\pi}_k\,,$$

e

$$\bar{\pi}_{kl} = \bar{h}_{kl} + \sum_i \bar{g}_{il}\,a_{ki}$$

$$\sum \bar{\pi}_{ki}\,\tau_{il} = \bar{H}_{kl} + \sum_i \bar{G}_{il}\,a_{ki}\,.$$

Ora, i numeri $\bar{h}\,\bar{g}\,\bar{H}\,\bar{G}$ si determinano facilmente, imitando il procedimento che segue l'Hurwitz nel caso che le curve $C_p\,\bar{C}_p$ siano sovrapposte e si rappresentino *allo stesso modo* su un'unica ciambella (talchè $\tau_{ik} = a_{ik}$). Si trova così

$$\bar{h}_{kl} = G_{lk}\,,\quad \bar{g}_{kl} = -\,g_{lk}\,,\quad \bar{H}_{kl} = -\,H_{lk}\,,\quad \bar{G}_{kl} = h_{lk}\,.$$

3. Vediamo adesso facilmente che

Se $p > 1$ e il determinante Π dei numeri π_{kl} è diverso da zero, non possono esistere su $\bar{C}_p$, nè su C_p, infinite coppie di punti i cui gruppi omologhi siano equivalenti o coincidano.

Infatti, se ogni gruppo $(y'\,y''\,...\,y^n)$ fosse equivalente a qualche altro gruppo analogo, i p integrali di $\bar{C}_p$

$$\sum_i \pi_{ki}\,u_i(x)$$

non potrebbero essere linearmente indipendenti [1]; quindi seguirebbe $\Pi = 0$, contro il supposto. Se poi si verificasse qualcun altro dei casi che vogliamo dimostrare assurdi, la serie descritta su C_p dal gruppo $(y'\,y''\,...\,y^n)$ dovrebbe godere di una delle due proprietà: 1ª) essere birazionale identica a una involuzione di $\bar{C}_p$ (loc. cit., n. 1); 2ª) essere nella stessa classe [2] con

[1] R. Torelli, *Sulle serie algebriche* ecc. [Rend. Palermo, tomo XXXVII (1914)], n. 16, III.

[2] Si dice che due serie (di egual dimensione) appartengono alla stessa *classe*, quando esse possono mettersi fra loro in corrispondenza biunivoca tale che la somma o la differenza di due gruppi omologhi varii in una serie lineare.

una serie composta con una involuzione (loc. cit., n. 21, teorema IV). Ma allora si arriverebbe daccapo alla deduzione che gli integrali sopra scritti non sono linearmente indipendenti.

Dalla precedente proposizione segue subito che

Se $p > 1$ *e* $\Pi \neq 0$, *le serie* γ_n^1, γ_ν^1 *degli ordini* n, ν, *indotte dalla corrispondenza* S *su* $C_p \bar{C}_p$, *hanno gli indici rispettivi* ν, n, *e sono birazionali identiche rispettivamente a* $\bar{C}_p C_p$.

Si potrebbe anche facilmente vedere che

Se è $\Pi \neq 0$, *è anche diverso da zero il determinante degli intieri caratteristici* (scritto al n. 9).

4. Supponiamo $p > 1$ e $\Pi \neq 0$. Chiamando omologhi su C_p due punti quando sono in uno stesso gruppo della serie γ_n^1, si ottiene su C_p una corrispondenza simmetrica T, di indice $\nu(n-1)$. In modo analogo si ottiene su $\bar{C}_p$ una corrispondenza simmetrica $\bar{T}$, di indici $n(\nu - 1)$.

Si ottengono facilmente le rappresentazioni analitiche delle corrispondenze T, $\bar{T}$.

Basta osservare che, per es., la T non è altro che il prodotto $S^{-1}S$, diminuito dell'identità contata ν volte. Con che, detti $y' y'' \ldots$ gli omologhi di y nella T, si hanno le formule

$$v_k(y') + v_k(y'') + \cdots = -\nu v_k(y) + \sum_i \pi_{ki}^\star v_i(y) + \pi_k^\star$$

$$\pi_{kl}^\star = h_{kl}^\star + \sum_i g_{il}^\star \tau_{ki}$$

$$\sum \pi_{ki}^\star \tau_{il} = H_{kl}^\star + \sum_i G_{il}^\star \tau_{ki} \quad (^1)$$

$$(3) \qquad \begin{cases} h_{kl}^\star = \quad G_{lk}^\star = \sum_i (h_{ki} G_{li} - H_{ki} g_{li}) \\ g_{kl}^\star = -g_{lk}^\star = \sum_i (g_{ki} G_{li} - G_{ki} g_{li}) \\ H_{kl}^\star = -H_{lk}^\star = \sum (H_{ki} h_{li} - h_{ki} H_{li}) . \end{cases}$$

Analogamente si potrebbero scrivere le formule relative a $\bar{T}$.

È anche facile di calcolare il comune difetto di equivalenza z *delle due serie* γ_n^1, γ_ν^1.

(1) Le espressioni delle costanti $\pi_k^\star$ non hanno per noi alcun interesse.

Avverto che le considerazioni di questo numero subiscono qualche *lievissima* modificazione, quando si tolga l'ipotesi $p > 1, \Pi \neq 0$.

Basta osservare che il numero dei punti doppî di γ_n^1, ossia dei punti uniti di T [1], è dato notoriamente da

$$2\nu(n+p-1)-2s\,;$$

e anche, per una importante formula di Hurwitz, da

$$2\nu(n-1)-2\left(\sum_k h_{kk}^{*}-\nu p\right).$$

Dal paragone delle due espressioni segue

$$s=\sum_k h_{kk}^{*}=\sum_{ki}(h_{ki}\,G_{ki}-H_{ki}\,g_{ki})\,. \tag{4}$$

5. Le considerazioni del n. 1 si invertono così: Se due sistemi di periodi normali $\tau_{ik}\,a_{ik}$ delle due curve $C_p\,\overline{C}_p$ soddisfano alle relazioni (2'), esistono fra $C_p\,\overline{C}_p$ infinite corrispondenze, cui competono gli intieri caratteristici $h\,g\,H\,G$ ovvero $-h\;-g\;-H\;-G$.

Tutte queste corrispondenze formano, come diremo, una *classe*, nel senso che le serie da esse indotte su C_p e su $\overline{C}_p$ formano una classe.

In una classe di corrispondenze (che non sia quella delle corrispondenze a valenza zero) esistono infinite corrispondenze aventi uno degli indici eguale a p. Basta osservare che, supposte verificate le (2), il sistema di *equazioni abeliane*

$$\overline{v_k(y')+\cdots+v_k(y^p)}=\sum_i \pi_{ki}\,u_i(x)+\pi_k\,,$$

colle costanti π_k genericamente scelte, individua, per ogni punto x di $\overline{C}_p$ un gruppo $(y'\ldots y^p)$ di p punti su C_p. In tal senso diremo che il precedente sistema rappresenta una γ'_p di C_p.

Notiamo che le cose dette in questo § 1, eccettuato naturalmente il n. 3, si estendono subito al caso di due curve di generi *diversi*.

§ 2. — Condizioni per l'identità birazionale di due curve.

6. Dalle considerazioni del § 1 deduciamo facilmente le condizioni necessarie cui debbono soddisfare le $\tau_{ik}\,a_{ik}$ perchè le due curve $C_p\,\overline{C}_p$ siano birazionalmente identiche. Basta pensare che, se fra $C_p\,\overline{C}_p$ intercede una corrispondenza biunivoca S, il prodotto $S^{-1}\,S$, la cui rappresentazione analitica si deduce subito da quella di S (n. 4), è l'identità. Tenendo dunque presenti le formule (2') (3), abbiamo il

[1] Se tali punti fossero infiniti, si ricorrerebbe a un'altra corrispondenza S', avente gli stessi intieri caratteristici di S (cfr. n. 5), e non presentante questa particolarità.

TEOREMA I. — *Se due curve $C_p\,\overline{C}_p$ sono birazionalmente identiche, fra due loro qualunque sistemi di periodi normali $\tau_{ik}\,a_{ik}$ intercedono certe p^2 relazioni*

$$\sum_{ji} g_{ji}\,\tau_{kj}\,a_{il} + \sum_i h_{ki}\,a_{il} - \sum_i G_{il}\,\tau_{ki} - H_{kl} = 0\,,$$

dove gli intieri $h\,g\,H\,G$ (dipendenti dalla scelta dei $\tau_{ik}\,a_{ik}$) soddisfano alle $p(2p-1)$ eguaglianze

$$\sum_i (h_{ki}\,G_{ki} - H_{ki}\,g_{ki}) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i (h_{ki}\,G_{li} - H_{ki}\,g_{li}) = 0 \\ &\sum_i (g_{ki}\,G_{li} - G_{ki}\,g_{li}) = 0 \\ &\sum_i (H_{ki}\,h_{li} - h_{ki}\,H_{li}) = 0 \end{aligned}\right\}\ k \neq l\,,$$

e alla condizione che il determinante dei numeri $\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\,\tau_{ki}$ è diverso da zero.

7. Le condizioni *sufficienti* per l'identità birazionale delle curve $C_p\,\overline{C}_p$ si deducono dal § 1 e da un teorema da me dimostrato tempo fa (¹): teorema il quale afferma, in sostanza, che se per la corrispondenza S, di cui si è parlato nel § 1, si verificano le due circostanze che il determinante dei numeri π_{kl} è diverso da zero, e il difetto d'equivalenza z delle serie $\gamma_n^1\,\gamma_\nu^1$ ha il valore p, allora nella classe individuata da S vi è una corrispondenza biunivoca. Otteniamo così il

TEOREMA II. — *Per affermare che due curve $C_p\,\overline{C}_p$ sono birazionali identiche, basta sapere che esse posseggono due sistemi di periodi normali $\tau_{ik}\,a_{ik}$ verificanti le p^2 relazioni*

$$\sum_{ji} g_{ji}\,\tau_{kj}\,a_{il} + \sum_i h_{ki}\,a_{il} - \sum_i G_{il}\,\tau_{ki} - H_{kl} = 0\,,$$

dove gli intieri $h\,g\,H\,G$ soddisfano alla condizione

$$\sum_{ik} (h_{ki}\,G_{ki} - H_{ki}\,g_{ki}) = p\,,$$

e all'altra che il determinante formato coi numeri $\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\,\tau_{ki}$ sia diverso da zero.

(¹) R. Torelli, *Sulle varietà di Jacobi* [questi Rend., vol. XXII, agosto 1913], teorema I.

8. Dal paragone dei teoremi I e II viene il seguente

COROLLARIO. — *Supposto che i numeri* $\tau_{ik}\, a_{ik}$ *siano due sistemi di periodi normali di due curve* $C_p\, \overline{C}_p$, *il sistema delle* p^2+1 *equazioni nelle* $h\, g\, H\, G$:

$$\sum_{ji} \tau_{kj}\, a_{il}\, g_{ji} + \sum_i a_{il}\, h_{ki} - \sum_i \tau_{ki}\, G_{il} - H_{kl} = 0 \tag{5}$$

$$\sum_{ki} (h_{ki}\, G_{ki} - H_{ki}\, g_{ki}) = p\,, \tag{6}$$

gode della seguente proprietà: se esso ammette una soluzione intera che non annulli il determinante Π *dei numeri* $\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki}$, *questa soluzione necessariamente soddisfa alle* $p(2p-1)$ *relazioni*

$$\sum_i (h_{ki}\, G_{ki} - H_{ki}\, g_{ki}) = 1$$

[si noti che da queste *segue* la (6)]

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i (h_{ki}\, G_{li} - H_{ki}\, g_{li}) = 0 \\ &\sum_i (g_{ki}\, G_{li} - G_{ki}\, g_{li}) = 0 \\ &\sum_i (H_{ki}\, h_{li} - h_{ki}\, H_{li}) = 0 \end{aligned}\right\}\ k \neq l\,.$$

Orbene: *questa proprietà del sistema* (5) (6) *implica delle relazioni fra i coefficienti* $\tau_{ik}\, a_{ik}$: *essa è cioè equivalente alle relazioni riemanniane, ricordate in prefazione, fra le* τ_{ik} *e fra le* a_{ik} (*o a parte di esse*).

Per giustificare questa affermazione osserviamo, che, scelti degli intieri $h\, g\, H\, G$ colla *sola* condizione che soddisfino alla (6), si può sempre risolvere, in ∞^p modi almeno, il sistema (5) rispetto alle $p(p+1)$ *incognite* $\tau_{ik}\, a_{ik}$ (convenendo che debba essere $\tau_{ik} = \tau_{ki}$, $a_{ik} = a_{ki}$). E la generica di queste soluzioni non annulla certo il determinante Π; perchè ciò non avviene *particolarizzando* ancor più gli intieri $h\, g\, H\, G$: basta, per convincersene, prendere due curve $C_p\, \overline{C}_p$ birazionalmente identiche, e scrivere le relazioni di cui parla il teorema I.

E. M.