ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Ora se diciamo G_1 e G_2 i baricentri delle sezioni σ_1 e σ_2, si ha, com'è noto,

$$\sigma_1 G_1 = \int_{\sigma_1} P_1 \, d\sigma_1 \quad ; \quad \sigma_3 G_2 = \int_{\sigma_2} P_2 \, d\sigma_2 \, ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{v} \, dS &= V_2 \sigma_2 G_2 - V_1 \sigma_1 G_1 \\ &= V_2 \sigma_2 (G_2 - G_1) \, . \end{aligned}$$

Perciò il secondo termine dell'espressione di $\mathbf{R}$ è:

$$-\varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{v} \, dS = -\varrho (G_2 - G_1) \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} \, ,$$

e si ritrova così l'espressione ad esso data dal Masoni, conforme a ciò che si era più sopra enunciato.

Giova osservare come nella citata espressione di $\mathbf{R}$, mentre il primo termine rappresenta l'effetto delle forze di massa, ossia l'azione *statica* del campo di forze, gli altri due termini rappresentano la vera azione *dinamica* del fluido in moto, espressa come la variazione dell'unità di tempo (derivata rispetto al tempo) della quantità di moto; il termine $-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \varrho \mathbf{v} \, dS$ rappresenta di questa variazione la parte dovuta al variare della velocità in funzione del tempo (ossia alla non permanenza del moto); ed il termine $Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ — che si ha pure quando il moto è permanente — rappresenta la parte dovuta al passaggio della massa fluida defluente nell'unità di tempo (portata di massa), dalla sezione σ_1 a monte, alla sezione σ_2 a valle.

Matematica. — *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica.* Nota II di Ruggiero Torelli, presentata dal Socio E. Bertini [1].

§ 3. — Condizioni per l'identità birazionale di due varietà di Jacobi.

9. Passiamo adesso a cercare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le due curve $C_p \, \overline{C}_p$ (per le quali adoperiamo le solite notazioni del n. 1) abbiano le varietà di Jacobi $V_p \, \overline{V}_p$ birazionalmente identiche. Perciò, detti $\mathbf{Y} \, \mathbf{X}$ i punti di $V_p \, \overline{V}_p$ immagini delle p-ple $(y' y'' \dots y^p)$ $(x' x'' \dots x^p)$ di punti di $C_p \, \overline{C}_p$, poniamo

$$\begin{aligned} V_k(Y) &= v_k(y') + \cdots + v_k(y^p) \\ U_k(X) &= u_k(x') + \cdots + u_k(x^p) \, ; \end{aligned}$$

[1] In questa Nota II continua la numerazione della Nota I.

saranno $V_k(Y)$, $U_k(X)$ $[k=1,\dots,p]$ due p-ple di integrali di 1ª specie, linearmente indipendenti, di $V_p\,\overline{V}_p$.

Se tra $V_p\,\overline{V}_p$ intercede una corrispondenza biunivoca, questa sarà rappresentata da relazioni analoghe alle (1), e cioè del tipo

$$V_k(Y) \equiv \sum_i \pi_{ki}\,U_i(X) + \pi_k\,; \tag{7}$$

e si avrà

$$\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\,\tau_{ki} \quad , \quad \sum_i \pi_{ki}\,a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\,\tau_{ki}\,, \tag{8}$$

$$\Pi \neq 0\,; \tag{9}$$

$hg\,HG$ essendo numeri intieri, e Π indicando il determinante dei numeri π_{kl}.

Ma se supponiamo viceversa soddisfatte le (8) e (9), le equazioni abeliane (7) definiranno tra $V_p\,\overline{V}_p$ una corrispondenza che sarà, generalmente, solo *unirazionale* (¹).

Noi ci proponiamo appunto di vedere quand'è che le (7) definiscono una corrispondenza birazionale.

Perciò cominciamo a osservare che, se nella corrispondenza (7) i punti $X\,X'$ di $\overline{V}_p$ hanno uno stesso omologo, anche due qualunque punti $X_1\,X_1'$ omologhi nella trasformazione di 1ª specie definita da $X\,X'$, tali cioè che

$$U_k(X_1) - U_k(X_1') \equiv U_k(X) - U_k(X') \qquad \text{modd. } a_{ik}\,,$$

avranno, com'è facile vedere, uno stesso omologo. Segue che la detta trasformazione di 1ª specie è ciclica, e quindi esiste un intiero $\varepsilon > 1$ tale che

$$\varepsilon U_k(X) \equiv \varepsilon U(X') \qquad \text{modd. } a_{ik}\,.$$

Il problema di vedere se la corrispondenza (7) è plurivoca è quindi ricondotto a quello di vedere se è possibile trovare un intiero $\varepsilon > 1$ e altri $2p$ intieri $m_i\,n_i$, non tutti divisibili per ε, tali che, presi su $\overline{V}_p$ due punti $X\,X'$ soddisfacenti alle relazioni

$$\varepsilon U_k(X) - \varepsilon U_k(X') = m_k + \sum_i n_i\,a_{ki}\,, \tag{10}$$

si abbia

$$\sum_i \pi_{ki}\,U_i(X) \equiv \sum_i \pi_{ki}\,U_i(X') \qquad \text{modd. } \tau_{ik}\,.$$

Ora dalle (8) (10) segue

$$\varepsilon \sum_i \pi_{ki}\,[U_i(X) - U_i(X')] = \sum_i (h_{ki}\,m_i + H_{ki}\,n_i) + \sum_{ji} (g_{ji}\,m_i + G_{ji}\,n_i)\,\tau_{kj}\,,$$

(¹) L'indice >1 sarà però certamente *finito* per l'ipotesi $\Pi \neq 0$.

e quindi il nostro problema si riconduce facilmente a quello di vedere se si possono determinare un intiero $\varepsilon > 1$ e altri $2p$ intieri $m_i\, n_i$ (non tutti divisibili per ε), in guisa da avere

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_i (h_{ki}\, m_i + \mathrm{H}_{ki}\, n_i) \equiv 0 \\ &\sum_i (g_{ki}\, m_i + \mathrm{G}_{ki}\, n_i) \equiv 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{mod. } \varepsilon\,.$$

Orbene, si vede subito che tal determinazione è possibile se, e solo se, il determinante del sistema (11) è, in valore assoluto, $\neq 1$. Abbiamo così il

TEOREMA III. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè due curve $\mathrm{C}_p\, \overline{\mathrm{C}}_p$ di genere p abbiano la stessa varietà di Jacobi, è che fra due loro* (1) *sistemi di periodi normali $\tau_{ik}\ a_{ik}$ intercedano p^2 relazioni*

$$\sum_{ji} g_{ji}\, \tau_{kj}\, a_{il} + \sum_i h_{ki}\, a_{il} - \sum_i \mathrm{G}_{il}\, \tau_{ki} - \mathrm{H}_{kl} = 0\,,$$

dove gli interi $h\, g\, \mathrm{H}\, \mathrm{G}$ soddisfano alla condizione che il determinante

$$(12) \qquad \left| \begin{array}{cccc} h_{11} \ldots h_{1p} & \mathrm{H}_{11} \ldots \mathrm{H}_{1p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_{p1} \ldots h_{pp} & \mathrm{H}_{p1} \ldots \mathrm{H}_{pp} \\ g_{11} \ldots g_{1p} & \mathrm{G}_{11} \ldots \mathrm{G}_{1p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_{p1} \ldots g_{pp} & \mathrm{G}_{p1} \ldots \mathrm{G}_{pp} \end{array} \right|$$

è uguale a ± 1, *e all'altra che il determinante dei numeri*

$$\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki}$$

è diverso da zero.

10. Da questo teorema deduciamo subito il seguente

COROLLARIO. — *Se le due curve $\mathrm{C}_p\, \overline{\mathrm{C}}_p$ hanno la stessa varietà di Jacobi, e una di esse, p. es. C_p, è priva di corrispondenze simmetriche singolari, allora le due curve sono birazionalmente identiche* (2).

Supponiamo, infatti, che siano soddisfatte le relazioni di cui parla il teorema III. Allora, presa una corrispondenza S (fra $\mathrm{C}_p\, \overline{\mathrm{C}}_p$) cui competano

(1) Per ciò che riguarda la necessità della condizione, si intenda sistemi *qualunque* (e allora gli intieri $h\, g\, \mathrm{H}\, \mathrm{G}$, di cui a momenti si parlerà, dipenderanno da essi); per ciò che riguarda la sufficienza, si intenda sistemi *particolari*: cfr. gli enunciati dei teoremi I e II.

(2) Questa proprietà è dovuta a Severi. Cfr. la Nota di Comessatti, citata in prefazione.

gli intieri caratteristici $hgHG$, dovrà la corrispondenza $S^{-1}S$ essere a valenza; detta $-\gamma$ (< 0 [1]) questa valenza, dovremo avere, causa le formule (3) del num. 4,

$$\sum_i (h_{ki}\, G_{ki} - H_{ki}\, g_{ki}) = \gamma \tag{13}$$

$$\left.\begin{cases} \sum_i (h_{ki}\, G_{li} - H_{ki}\, g_{li}) = 0 \\ \sum_i (g_{ki}\, G_{li} - G_{ki}\, g_{li}) = 0 \\ \sum_i (H_{ki}\, h_{li} - h_{ki}\, H_{li}) = 0 \end{cases}\right\} k \neq l . \tag{14}$$

Ma da queste segue facilmente che il determinante (12) ha [2] il valore γ^{2p}: e poichè esso ha, per ipotesi, il valore ± 1 (e $\gamma > 0$), segue $\gamma = 1$. Le (13) (14) allora, in virtù del teorema II, portano alla identità birazionale di $C_p\, \overline{C}_p$; c. v. d.

§ 4. — Questioni ausiliarie.

11. Consideriamo la varietà $\overline{V}_\rho$ delle ρ-ple di punti di una curva $\overline{C}_p$. Tra le sue varietà canoniche vi sono quelle aventi per imagine le serie di gruppi di ρ punti estratti dai gruppi delle $g^{\rho-1}_{2p-2}$ canoniche di $\overline{C}_p$ [3]. Pertanto, prese, su $\overline{C}_p$, $\rho - 1$ serie $g^{\rho-1}_{2p-2}$ canoniche, la serie γ^1_ρ, costituita dagli ∞^1 gruppi di ρ punti ad esse comuni, è imagine di una curva comune a $\rho - 1$ varietà canoniche di $\overline{V}_\rho$.

Proponiamoci di *calcolare l'indice e il difetto di equivalenza della serie* γ^1_ρ. Per questo osserviamo che, preso un punto P di $\overline{C}_p$, i gruppi della γ^1_ρ per esso passanti si ottengono così: si considerino le $\rho - 1$ serie $g^{\rho-2}_{2p-3}$ subordinate da P nelle date $g^{\rho-1}_{2p-2}$; esse hanno a comune un certo numero μ di gruppi di $\rho - 1$ punti $G_1 G_2 \ldots G_\mu$: saranno $P + G_1$, $P + G_2$, ..., $P + G_\mu$ i gruppi richiesti, e quindi μ l'indice di γ^1_ρ. Ora si ha (Comessatti) [4]

$$\mu = a(2p-3) + b\,\frac{2p-2}{\rho-1}, \tag{15}$$

[1] R. Torelli, *Sulle varietà di Jacobi*, Nota II [questi Rend., vol. XXII, nov. 1913], n°. 5, A).

[2] Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, 1913), V Kapitel, § 2.

[3] Severi, *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari* ecc. [Questi Rendiconti, vol. XX, aprile 1911], n. 5.

[4] *Determinazione dei gruppi di* $r+1$ *punti* ecc. [Atti Istit. Ven., tom. LXIX, an. 1909-10].

dove

$$a = \sum_{k=0}^{\rho-2} \binom{\rho-2}{k} (p-\rho-1)^{\rho-2-k} (p-1)(p-2)\dots(p-k),$$

$$b = \frac{(\rho-2)(\rho-1)}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\rho-2} \binom{\rho-3}{k-1} (p-\rho-1)^{\rho-2-k} \times$$
$$\times (p-2)(p-3)\dots(p-k):$$

abbiamo così trovato l'indice di γ_ρ^1.

Si osservi, poi, che (sempre secondo Comessatti, loc. cit.) si ha

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_\mu \equiv (a+b)\,K - a(\rho-1)\,P\,,$$

K essendo un gruppo canonico. Adunque la corrispondenza simmetrica che a P fa corrispondere il gruppo $G_1 + \cdots + G_\mu$ ha la valenza

$$\gamma = a(\rho-1)\,. \tag{16}$$

Ne segue (¹) che il difetto d'equivalenza ζ di γ_ρ^1 è dato da

$$\zeta = p[\mu - (\rho-1)\,a] = p \sum_{k=0}^{\rho-2} (2p-\rho-2-k) \binom{\rho-2}{k} \times$$
$$\times (p-\rho-1)^{\rho-2-k} (p-1)(p-2)\dots(p-k)\,. \tag{17}$$

Le (15) e (17) sono appunto le formule cercate.

12. Dalla precedente considerazione deduciamo una proprietà di cui faremo uso in fine del n. 15. Si osservi che la serie costituita dalle ρ-ple di punti di $\overline{C}_p$, resa di ordine p coll'aggiunta di $p-\rho$ punti fissi, ha per imagine, entro la varietà jacobiana $\overline{V}_p$ di $\overline{C}_p$, una varietà $\overline{W}_\rho$ (vedi prefazione). Se poi teniamo presente che le $\overline{W}_{p-1}$ di $\overline{V}_p$ sono imagini delle serie costituite dalle p-ple di punti estratti dai gruppi delle g_{2p-1}^{p-1} di $\overline{C}_p$, vediamo che il difetto d'equivalenza della serie γ_ρ^1, di cui al n°. precedente, rappresenta il *carattere di immersione* (vedi prefazione) delle varietà $\infty^{\rho-1}$ segate su $\overline{W}_\rho$ dalle W_{p-1}.

Possiamo perciò enunciare il seguente

LEMMA. — *Entro una varietà di Jacobi V_p, le varietà W_{p-1} segano, su una W_ρ varietà $\infty^{\rho-1}$ aventi il carattere d'immersione*

$$p \sum_{k=0}^{\rho-2} (2p-\rho-2-k) \binom{\rho-2}{k} (p-\rho-1)^{\rho-2-k} \times$$
$$\times (p-1)(p-2)\dots(p-k)\,.$$

Questo lemma è, in fondo, l'inversa del teorema IV.

(¹) Torelli, loc. cit., a pag. 4.

13. *Questione II.* Riprendiamo a considerare le due curve $C_p\,\overline{C}_p$, e la corrispondenza S, di indici $n\,,\nu$, di cui si parlava nel n. 1. Supponiamo, poi, che su $\overline{C}_p$ si abbia una serie γ_m^1, di ordine m e indice μ, tale che, chiamando omologhi due punti quando sono in uno stesso suo gruppo, si abbia una corrispondenza simmetrica ϑ a valenza γ.

La corrispondenza S, che intercede fra $\overline{C}_p\,C_p$, muterà tal γ_m^1 in una serie γ_{mn}^1, di indice $\mu\nu$, su C_p. *Quale sarà il difetto d'equivalenza di questa* γ_{mn}^1?

Tale questione si risolve subito. Infatti la corrispondenza simmetrica, di indici $\nu\mu(mn-1)$, in cui si corrispondono due punti quando sono in uno stesso gruppo della γ_{mn}^1, è data dal simbolo

$$S^{-1}\,\vartheta S+\mu S^{-1}\,S-\mu\nu I\,,$$

I indicando l'identità su C_p; se ne calcolano quindi facilmente gli intieri caratteristici in funzione di quelli di S e di γ; e, con ragionamento analogo a quello fatto in fine al n. 4, si trova che il difetto d'equivalenza ζ della γ_{mn}^1 è dato da

$$\zeta=(\mu-\gamma)\sum_{ki}(h_{ki}\,G_{ki}-H_{ki}\,g_{ki})\,, \tag{18}$$

che è la formula cercata.

§ 5. — Sulle serie algebriche più volte infinite.

14. Dimostriamo infine il seguente

Teorema IV*. — *Sopra una curva* C_p *abbiasi una serie* γ_p^ϱ *(anche dotata di punti fissi), birazionalmente identica alla varietà delle* ϱ*-ple di punti di un'altra curva* $\overline{C}_p$, *e tale che nessun integrale di* 1ª *specie di* C_p *dia somma costante lungo i suoi gruppi.*

Se la totalità dei gruppi di p punti, tolti dai gruppi di una generica g_{2p-1}^{p-1} *di* C_p, *sega sulla* γ_p^ϱ *una* $\gamma_p^{\varrho-1}$ *avente il carattere di immersione*

$$p\sum_{k=0}^{\varrho-2}(2p-\varrho-2-k)\binom{\varrho-2}{k}(p-\varrho-1)^{\varrho-2-k}\times \times(p-1)(p-2)\ldots(p-k)\,, \tag{17'}$$

allora le due curve $C_p\,\overline{C}_p$ *sono birazionalmente identiche, e la* γ_p^ϱ *appartiene alla classe individuata dalla serie delle* ϱ*-ple di punti* di C_p.

Adoperiamo per $C_p\,\overline{C}_p$ le solite notazioni stabilite al n. 1. La nostra serie sarà rappresentata (analogamente a quanto avviene per le serie ∞^1)

da un sistema di equazioni del tipo

$$(19)\qquad v_k(y') + \cdots + v_k(y^p) = \sum_i \pi_{ki}\,[u_k(x') + \cdots + u_k(x^\rho)] + \pi_k\,,$$

$(x' \ldots x^\rho)$ essendo un gruppo di ϱ punti variabili su $\bar{C}_p$. Avremo le solite relazioni

$$\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\,\tau_{ki}$$

$$\sum \pi_{ki}\,a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\,\tau_{ki}\,,$$

e il determinante dei numeri π_{kl} sarà, per ipotesi, diverso da zero.

Se al gruppo $(x' \ldots x^\rho)$ facciamo descrivere la serie γ^1_ρ di cui si è parlato al n. 11, il corrispondente gruppo di p punti su C_p [individuato dalle (19)] descrive una serie γ^1_p, il cui difetto di equivalenza ζ è appunto il carattere di immersione delle $\gamma^{\rho-1}_p$ di cui parla l'enunciato.

D'altronde si pensi che la detta γ^1_p appartiene alla stessa classe che la serie $\gamma^1_{\rho p}$, descritta dagli omologhi dei punti del gruppo variabile di γ^1_ρ nella corrispondenza S definita, fra C_p e $\bar{C}_p$, dalle equazioni abeliane

$$v_k(y') + \cdots + v_k(y^p) = \sum_i \pi_{ki}\,u_i(x) + \pi_k\,.$$

Allora il numero ζ, essendo anche il difetto della serie $\gamma^1_{p\rho}$, può calcolarsi mediante la considerazione del n. 13 e le formule (15) (16); e si trova

$$\zeta = \sum_{ij} (h_{ij}\,G_{ij} - H_{ij}\,g_{ij}) \sum_{k=0}^{\rho-2} (2p - \varrho - 2 - k) \binom{\varrho - 2}{k} \times$$
$$\times (p - \varrho - 1)^{\rho-2-k}\,(p-1)\,(p-2) \ldots (p-k)\,.$$

Se dunque ζ ha il valore (17'), dal confronto di (17') e dall'ultima espressione scritta risulta

$$\sum_{ij} (h_{ij}\,G_{ij} - H_{ij}\,g_{ij}) = p\,,$$

e quindi (n. 7) nella classe definita dalla corrispondenza S vi è una corrispondenza biunivoca. Questa indurrà, fra le ϱ-ple di punti di $C_p\,\bar{C}_p$, una corrispondenza biunivoca, rappresentata o dalle

$$v_k(y') + \cdots + v_k(y^\rho) = \sum_i \pi_{ki}\,[u_i(x') + \cdots + u_i(x^\rho)] + \pi'_k\,,$$

oppure dalle

$$v_k(y') + \cdots + v_k(y^\varrho) = -\sum \pi_{ki}\left[u_i(x') + \cdots + u_i(x^\varrho)\right] + \pi'_k$$

(le π'_k essendo opportunamente scelte); e ciò dimostra il nostro teorema.

Questo teorema è manifestamente equivalente al teorema IV della prefazione.

15. La deduzione dei teoremi V e VI (enunciati in prefazione) dal IV non offre alcuna difficoltà. Infatti:

A) Se fra le varietà di Jacobi $\overline{V}_p\ V_p$ di due curve $\overline{C}_p\ C_p$ intercede una corrispondenza biunivoca che muti una $\overline{W}_\varrho$ di $\overline{V}_p$ in una W_ϱ di V_p, a quest'ultima W_ϱ si può, in virtù del lemma del n. 12, applicare il teorema IV; e ne viene il teorema V.

B) Se la serie γ_ϱ^ϱ, costituita dalle ϱ-ple di punti di una curva C_p, è birazionalmente identica alla serie analoga di un'altra curva $\overline{C}_p$, alla γ_ϱ^ϱ, resa di ordine p coll'aggiunta di $p-\varrho$ punti fissi, si può, pel lemma del n. 12, applicare il teorema IV*; e ne risulta il teorema VI.

Matematica. — *Sopra un'operazione funzionale atta a trasformare i potenziali logaritmici in simmetrici.* Nota II della signorina LINA BIANCHINI, presentata del Socio T. LEVI-CIVITA.

4. — CONDIZIONE DI REALTÀ. LEGAME CON POTENZIALI ASSOCIATI LOGARITMICI.

Nelle (7) (1) non è tenuto conto della condizione che u, v risultino reali. Vediamo come debba specificarsi la funzione f affinchè questo abbia luogo, supponendo che la f, considerata come funzione del suo argomento $x+iy\cos\vartheta$, si comporti regolarmente in una certa regione Γ del piano rappresentativo (x, y) (per tutti i valori di ϑ compresi nell'intervallo $0, \pi$). Questo implica manifestamente che la Γ comprenda, insieme con ogni punto (x, y), tutto il segmento $(x, y\cos\vartheta)$ che lo congiunge col suo simmetrico $(x, -y)$. Ciò premesso, ove si scinda in f la parte reale dall'immaginaria, ponendo

$$f = \varphi + i\psi,$$

e più precisamente

$$f(x+iy\cos\vartheta) = \varphi(x, y\cos\vartheta) + i\psi(x, y\cos\vartheta),$$

(1) Della Nota precedente. Cfr. pp. 1041-1046 di questo volume dei Rendiconti.