ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

oppure dalle

$$v_k(y') + \cdots + v_k(y^\rho) = -\sum \pi_{ki}[u_i(x') + \cdots + u_i(x^\rho)] + \pi'_k$$

(le π'_k essendo opportunamente scelte); e ciò dimostra il nostro teorema.

Questo teorema è manifestamente equivalente al teorema IV della prefazione.

15. La deduzione dei teoremi V e VI (enunciati in prefazione) dal IV non offre alcuna difficoltà. Infatti:

A) Se fra le varietà di Jacobi $\bar{V}_p V_p$ di due curve $\bar{C}_p C_p$ intercede una corrispondenza biunivoca che muti una $\overline{W}_\rho$ di $\bar{V}_p$ in una W_ρ di V_p, a quest'ultima W_ρ si può, in virtù del lemma del n. 12, applicare il teorema IV; e ne viene il teorema V.

B) Se la serie γ^ρ_ρ, costituita dalle ρ-ple di punti di una curva C_p, è birazionalmente identica alla serie analoga di un'altra curva $\bar{C}_p$, alla γ^ρ_ρ, resa di ordine p coll'aggiunta di $p-\rho$ punti fissi, si può, pel lemma del n. 12, applicare il teorema IV*; e ne risulta il teorema VI.

Matematica. — *Sopra un'operazione funzionale atta a trasformare i potenziali logaritmici in simmetrici.* Nota II della signorina Lina Bianchini, presentata del Socio T. Levi-Civita.

4. — Condizione di realtà. Legame con potenziali associati logaritmici.

Nelle (7) [1] non è tenuto conto della condizione che u, v risultino reali. Vediamo come debba specificarsi la funzione f affinchè questo abbia luogo, supponendo che la f, considerata come funzione del suo argomento $x+iy\cos\vartheta$, si comporti regolarmente in una certa regione Γ del piano rappresentativo (x, y) (per tutti i valori di ϑ compresi nell'intervallo $0, \pi$). Questo implica manifestamente che la Γ comprenda, insieme con ogni punto (x, y), tutto il segmento $(x, y\cos\vartheta)$ che lo congiunge col suo simmetrico $(x, -y)$. Ciò premesso, ove si scinda in f la parte reale dall'immaginaria, ponendo

$$f = \varphi + i\psi,$$

e più precisamente

$$f(x + iy\cos\vartheta) = \varphi(x, y\cos\vartheta) + i\psi(x, y\cos\vartheta),$$

[1] Della Nota precedente. Cfr. pp. 1041-1046 di questo volume dei Rendiconti.

dalla prima delle (7) si ha

$$u = \int_0^\pi \varphi(x\,,y\cos\vartheta) + i\int_0^\pi \psi(x\,,y\cos\vartheta)\,d\vartheta\,.$$

Il coefficiente β di i, scindendo l'intervallo di integrazione nei due tratti $\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}\,,\pi\right)$ (e cambiando in quest'ultimo, ϑ in $\pi-\vartheta$), può essere scritto

$$\beta = \int_0^\pi \psi(x\,,y\cos\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\psi(x\,,y\cos\vartheta) + \psi(x\,,-y\cos\vartheta)\}\,d\vartheta\,.$$

La condizione che u sia reale, equivale a $\beta = 0$; e questa implica, a sua volta, che si annulli identicamente la funzione sotto il segno [1], ossia, in sostanza, che $\psi(x\,,y)$ sia funzione dispari dell'argomento y.

Viceversa è evidente che, sotto tale ipotesi, $\beta = 0$.

Notiamo, d'altra parte, che, se ψ è funzione dispari di y, essa s'annulla sull'asse reale Ox; la nostra $f(x+iy)$ è quindi vincolata alla condizione di essere reale sull'asse reale (o più precisamente in quella parte di esso che cade entro il campo Γ, cui si riferiscono queste considerazioni).

Con ciò, non solo risulta ψ funzione dispari di y, ma altresì φ pari $[\varphi(x\,,y) = \varphi(x\,,-y)]$, e subito si verifica che anche la seconda delle (7) definisce una funzione reale

$$v = \int_0^\pi y\cos\vartheta\,\psi(x\,,y\cos\vartheta)\,d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos\vartheta\,\psi(x\,,y\cos\vartheta)\,d\vartheta\,.$$

Possiamo quindi concludere: Condizione necessaria e sufficiente per la realtà delle due coniugate $u\,,v$, è che f sia reale sull'asse reale. Complessivamente le dette $u\,,v$ rimangono definite da

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} u = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x\,,y\cos\vartheta)\,d\vartheta\,, \\ v = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos\vartheta\,\psi(x\,,y\cos\vartheta)\,d\vartheta\,, \end{cases}$$

[1] Questa affermazione è giustificata dal teorema di Abel, che richiamiamo più innanzi, al n. 5. Dalle due relazioni reciproche ivi esplicitate, appare manifesto che, per $\beta = 0$, α risulta identicamente nullo. Ora la

$$\beta(x\,,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\psi(x\,,y\cos\vartheta) + \psi(x\,,-y\cos\vartheta)\}\,d\vartheta$$

è precisamente un caso particolare della prima delle due relazioni suddette, in cui (trattando x come parametro costante) si scriva y al posto di r, e si ponga

$$2\alpha(y\cos\vartheta) = \psi(x\,,y\cos\vartheta) + \psi(x\,,-y\cos\vartheta)\,.$$

nelle quali le funzioni sotto il segno, φ e ψ, costituiscono manifestamente due funzioni associate logaritmiche provenienti da un'arbitraria f reale sull'asse reale. Tale f si dirà l'*assiale* della coppia simmetrica associata (u, v). Dalla nostra indagine risulta altresì che *tutte* le coppie simmetriche si possono pensare generate in questo modo.

5. — Formule inverse.

Secondo una proposizione scoperta da Abel si equivalgono [1] le due relazioni

$$\begin{cases} \psi(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(r \operatorname{sen} \vartheta)\, d\vartheta\,, \\ \varphi(r) = \dfrac{d}{dr}\dfrac{r}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r \operatorname{sen} \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta\, d\vartheta\,, \end{cases}$$

che, chiamando φ e ψ rispettivamente α e β, e ponendo $\vartheta = \dfrac{\pi}{2} - \vartheta'$, si possono anche scrivere come segue:

$$\begin{cases} \beta(r) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(r \cos \vartheta)\, d\vartheta\,, \\ \alpha(r) = \dfrac{d}{dr}\dfrac{r}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta(r \cos \vartheta) \cos \vartheta\, d\vartheta\,. \end{cases}$$

In base a ciò, le due ultime espressioni trovate per le u e v equivarranno rispettivamente alle

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = \dfrac{d}{dy}\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x, y \cos \vartheta) \cos \vartheta\, d\vartheta\,, \\ y\,\psi(x, y) = \dfrac{d}{dy}\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} v(x, y \cos \vartheta) \cos \vartheta\, d\vartheta\,. \end{cases}$$

6. — Introduzione di argomenti complessi e riduzione ad un'unica relazione funzionale.

Poniamo

$$w = u + iv\,, \tag{8}$$

[1] Circa tale equivalenza, veggasi Beltrami, loc. cit.

riprendendo anche la combinazione (*monogena*, a differenza della w che, in generale, non lo è)

$$f = \varphi + i\psi ,$$

Sostituiti per u e v i loro valori forniti dalle (7), la (8) assume l'aspetto

$$w = u + iv = \int_0^\pi (1 + y \cos\vartheta)\, f(x + iy \cos\vartheta)\, d\vartheta .$$

Indicheremo brevemente con A l'operazione funzionale definita dal secondo membro dell'equazione testè scritta, la quale fa passare dalla funzione monogena f dell'argomento $x + iy$ (reale sull'asse reale) alla $w = u + iv$, funzione in generale non monogena, ma regolare nello stesso campo in cui tale si suppone f, e reale, al pari di f, sull'asse reale.

Le (II) ci mostrano che, ammesso per u, v il comportamento qualitativo suddetto, rimane univocamente definita anche un'operazione inversa A^{-1}, che fa passare da w ad una funzione *monogena* f.

7. — Gruppo di trasformazioni che conserva le funzioni associate simmetriche.

Le funzioni $f(z)$, reali sull'asse reale, ammettono un gruppo puntuale infinito di trasformazioni in sè, che si ottiene ovviamente ponendo

$$f' = F(f) , \tag{9}$$

con F funzione (monogena) arbitraria, perchè anch'essa reale sull'asse reale.

È facile riconoscere che questo gruppo ne subordina uno altrettanto ampio (disgraziatamente però *funzionale*, anzichè *locale*) nei potenziali simmetrici.

Sia infatti $w = u + iv$ il rappresentante complesso di una coppia generica, e sia f l'assiale relativo. Ove si indichi con T una trasformazione del tipo (9), e con w' la coppia simmetrica che corrisponde ad f', avremo manifestamente

$$w = Af \quad , \quad f' = Tf \quad , \quad w' = Af' ,$$

da cui

$$w' = Af' = ATf = (ATA^{-1})\, w .$$

Apparisce, di qui, che i potenziali associati simmetrici ammettono il gruppo la cui operazione generica è ATA^{-1}, gruppo manifestamente simile a quello delle T, ossia al gruppo conforme.