ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di prima specie.* Nota di A. VERGERIO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un suolo elastico piano indefinito, omogeneo ed isotropo, nel caso dell'eredità lineare, per dati spostamenti in superficie.* Nota del prof. R. SERINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Nel problema elastico con eredità lineare le equazioni indefinite dell'equilibrio (in assenza di forze di massa, al qual caso ci si può sempre ridurre) sono:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad \Delta^2 v = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \qquad \Delta^2 w = \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \tag{1}$$

dove u, v, w sono le componenti dello spostamento.

La funzione ϑ è legata alla dilatazione cubica θ dalla relazione

$$\vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2)\, \theta, \tag{2}$$

nella quale

$$A_1 f(t) = K f(t) + \int_0^t \psi(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

$$A_2 f(t) = (L + 2K)\, f(t) + \int_0^t [\varphi(t, \tau) + 2\psi(t, \tau)]\, f(\tau)\, d\tau \quad (^1).$$

L'operazione $A_1^{-1} f$ si ottiene invertendo $A_1 f$, risolvendo un'equazione integrale di Volterra di seconda specie.

Dalle (1) e (2) si deduce

$$\Delta^2 \vartheta = 0. \tag{3}$$

Per risolvere il problema che forma l'oggetto della presente Nota, mi servo del teorema dovuto all'Almansi (²), secondo il quale la soluzione del sistema (1), quando θ è armonica, si può porre sotto la forma

$$u = z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + U \qquad v = z \frac{\partial \varphi}{\partial y} + V \qquad w = z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + W, \tag{4}$$

(¹) V. Volterra, *Leçons sur les fonctions des lignes*, cap. VIII; Acta mathematica, *Sur le équations intégrales* ecc., vol. 35°, articoli 4-7.

(²) E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^{2n} = 0$, Annali di matematica.

dove le quattro funzioni U, V, W, φ sono armoniche, e inoltre φ soddisfa alla relazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}\vartheta . \tag{5}$$

2. Le equazioni (4) e (5) si applicano al problema del suolo elastico omogeneo ed isotropo nel caso della eredità lineare. Prendiamo per piano xy il piano delimitante il suolo elastico il quale occupi la regione per cui $z > 0$.

Essendo dati gli spostamenti in superficie, saranno determinati i valori di u, v, w per $z = 0$, e quindi, per le (4), i valori di U, V, W che indicheremo con

$$U_\sigma \quad V_\sigma \quad W_\sigma .$$

La teoria delle funzioni armoniche ci dà subito U, V, W sotto la forma [1]

$$U = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \frac{U_\sigma\, d\sigma}{r} \qquad V = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \frac{V_\sigma\, d\sigma}{r} \tag{6}$$

$$W = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \frac{W_\sigma\, d\sigma}{r},$$

dove l'integrazione va estesa al piano xy, ed r rappresenta la distanza del punto xyz dal punto $x'y'o$ del piano.

Posto

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{U_\sigma\, d\sigma}{r} = U_1 \qquad -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{V_\sigma\, d\sigma}{r} = V_1 \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{W_\sigma\, d\sigma}{r} = W_1 ,$$

le (4), in virtù delle (6) e (7), diventano

$$u = z\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \qquad v = z\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \qquad w = z\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial W_1}{\partial z} . \tag{8}$$

Per determinare ora la φ, calcoliamo dalle (8) la dilatazione cubica θ.

Essendo

$$\Delta^2 \varphi = 0 ,$$

avremo

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right).$$

[1] E. Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, IX, 7.

Da quest'ultima e dalle (2) e (5) ricavo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - A_1^{-1} A_2)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right)\right],$$

ossia, risolvendo rispetto a $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (1 + A_1^{-1} A_2)^{-1}(1 - A_1^{-1} A_2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) \text{ (1)}.$$

Ma i simboli $A_1 f$, $A_2 f$, e quelli composti con essi, sono permutabili col segno di derivata; quindi, ponendo

$$(1 + A_1^{-1} A_2)^{-1}(1 - A_1^{-1} A_2) f = G \cdot f,$$

avremo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} G\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right).$$

Quest'ultima equazione varrà in particolare pei punti del piano xy; ed allora le due funzioni armoniche

$$\varphi \quad , \quad G\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right),$$

avendo superficie derivata normale eguale, non possono differire che per una costante la quale non ci interessa in quanto che nelle (4) entrano solo le derivate della φ.

Potremo quindi porre

$$\varphi = G\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right).$$

Avendo così determinate le quattro funzioni U, V, W, φ, il problema è risolto.

Per ottenere la soluzione nel caso ordinario, basta porre eguali a zero i coefficienti di eredità

$$\varphi(t, \tau) \qquad \psi(t, \tau)$$

e prendere

$$A_1 = K \qquad A_2 = L + 2K.$$

(1) Secondo la convenzione solita delle due operazioni indicate, quella a destra è da intendersi come eseguita per prima.

I simboli operatori $A_1 A_2$, e le loro composizioni, si considerino come moltiplicazioni. Allora

$$G = (1 + A_1^{-1} A_2)^{-1} (1 - A_1^{-1} A_2) =$$
$$= \left(1 + \frac{L + 2K}{K}\right)^{-1} \left(1 - \frac{L + 2K}{K}\right) =$$
$$= \frac{K}{L + 3K} \cdot \frac{-(L + K)}{K} = -\frac{L + K}{L + 3K}.$$

Se introduciamo, invece delle due costanti d'isotropia L, K, il coefficiente di contrazione definito dalla relazione

$$m = \frac{1}{2} \frac{L}{L + K},$$

ritroviamo

$$G = -\frac{1}{3 - 4m}$$

che è il risultato cui giunge l'Almansi [1].

Astronomia. — *La latitudine di Roma negli anni 1912-13, e l'ipotesi dell'Hirajama.* Nota di E. Bianchi, presentata dal Socio E. Millosevich.

1. In un breve appunto da me pubblicato nella « *Rivista d'astronomia* [2] » esprimevo il voto che anche in Italia, con osservazioni indipendenti da quelle del servizio internazionale, si portasse un qualche contributo alla questione del così detto terzo termine del Kimura nel problema generale della variazione delle latitudini. Ricordavo che, essendo noi posti all'incirca sullo stesso parallelo delle Stazioni internazionali, in nulla potevamo concorrere per la decisione se, o meno, detto termine dovesse affermarsi come dipendente dalla latitudine e quindi esprimente un moto oscillatorio annuo del centro di gravità terrestre. Dicevo però ancora che, se in nulla potevamo contribuire allo studio della questione da questo punto di vista (da ritenersi riservato a misure fatte in stazioni equatoriali e boreali alte), ben potevamo invece cooperare per decidere dell'attendibilità o meno della ipotesi dell'Hirajama; per decidere cioè se o meno detto termine z fosse la manifestazione di un vizio insito nelle osservazioni internazionali in causa del tipo di programma che colà si svolge nelle misure di latitudine.

Riportandomi poi ad una Nota sull'argomento pubblicata da me nei *Rendiconti* di quest'Accademia [3], ripetevo che un contributo in questo senso doveva attendersi da osservazioni fatte su zenitali assolute, opportunamente

[1] Nella citata Memoria dell'Almansi è sfuggito un errore nel calcolo di G [formula (58)]. Rettificando il risultato, si trova per G il valore da me dato.

[2] Volume VI, 1912, pag. 801-804.

[3] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, I semestre, 1909, n. 3.