ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Geometria. — *Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. La geometria differenziale metrica si occupa ora quasi esclusivamente delle proprietà appartenenti al gruppo dell'applicabilità, cioè delle proprietà invariantive per una deformazione dell'ente che si studia, la quale lasci inalterati i suoi elementi lineari. Viene affatto spontanea alla mente l'idea di studiare l'effetto di quelle deformazioni nelle quali all'invarianza dell'elemento lineare dell'ente, p. es. superficie, sia sostituita l'invarianza di un certo numero di curvature di linee tracciate su di essa. È naturale che la esistenza di tali deformazioni è legata alla dimensione dello spazio in cui la superficie è immersa, e alla dimensione dello spazio su cui la si vuol applicare (uguale o distinta dalla precedente); talchè, p. es., non c'è luogo a parlare di queste nuove deformazioni nello spazio ordinario (riducendosi esse ai movimenti). Ma non appena si aumenti la dimensione dell'ambiente i nuovi problemi si presentano altrettanto naturali quanto gli antichi: ed anzi, in alcuni casi [1], gli uni e gli altri si equivalgono.

Io non tento per ora una teoria generale: mi limito a dar alcuni resultati; e ciò faccio tanto più volentieri perchè essi si riattaccano a nozioni di geometria proiettivo-differenziale, delle quali viene nuovamente provata l'utilità. Mi servo di considerazioni infinitesimali, cioè di quelle che il Beltrami considerava come il miglior aiuto in queste ricerche.

2. Nell'applicare una superficie sviluppabile [2] (luogo delle tangenti ad una curva, cono, o cilindro) sopra un piano, rimangono inalterati gli elementi lineari delle curve tracciate su di essa; varia invece la loro curvatura, ad eccezione di quella dello spigolo di regresso, i cui angoli di contingenza rimangono invariati nell'applicazione.

Si supponga la superficie sviluppabile immersa in un S_n con $n > 3$: in tal caso è possibile di deformarla lasciando inalterati e gli elementi lineari e la prima curvatura delle curve tracciate su di essa. Basta adagiare, con successive rotazioni infinitesime intorno ai piani osculatori, gli S_3 osculatori allo spigolo di regresso sopra un S_3 fisso. Siccome ciascuno di quegli S_3 contiene due elementi lineari successivi di una qualsiasi curva tracciata sulla

[1] Cfr. la mia Nota: *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie* (Atti R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, 1914), n. 5.

[2] Intendiamo parlare sempre di spazî euclidei.

sviluppabile, ogni coppia rimane inalterata nella rotazione; e l'elemento lineare comune a due coppie successive, appartenendo al piano-asse di rotazione, rimane fisso. In questa operazione non mutano perciò nè gli elementi lineari nè gli angoli di contingenza di una qualsiasi curva della superficie: quindi non muta neppure la sua prima curvatura. Concludiamo senz'altro con l'osservazione:

I. *Una superficie sviluppabile può applicarsi sopra un* S_h *conservando l'elemento lineare e le prime* $h-2$ *curvature di ogni curva tracciata sulla superficie, e la* $(h-1)$*-esima dello spigolo di regresso.*

2. L'osservazione precedente è strettamente legata al fatto che due generatrici successive della rigata sono linearmente dipendenti (di carattere proiettivo), cioè che la rigata ha indice di sviluppabilità 1. Ricerchiamo il significato metrico del primo indice di sviluppabilità in generale.

Ho denominato (¹) primo indice di sviluppabilità di una rigata il massimo numero di generatrici consecutive linearmente indipendenti di essa. Una rigata d'indice di sviluppabilità ν appartiene ad uno spazio di dimensione $\geq 2\nu-1$; però la rigata dello $S_{2\nu-1}$ non è di tipo generale, e poichè appartiene di già allo spazio di minima dimensione possibile (compatibilmente col suo indice di sviluppabilità), non va considerata nella presente ricerca (di applicabilità sopra uno spazio di dimensione inferiore). Siccome lo spazio di dimensione minima per una rigata di tipo generale è un $S_{2\nu}$, bisognerà prendere in esame quelle appartenenti a spazii di dimensione $>2\nu$.

Siccome $\nu+1$ generatrici consecutive sono linearmente dipendenti, esse individuano un $S_{2\nu}$; gli $S_{2\nu-1}$, contenenti ν generatrici successive, riescono perciò osculatori ad una curva σ (²) (non appartenente in generale alla rigata); il punto d'intersezione di una generatrice con lo spazio delle ν precedenti descrive una curva, γ, appartenente alla rigata.

Ciò premesso, consideriamo due $S_{2\nu}$ consecutivi e lo $S_{2\nu-1}$ loro intersezione; possiamo far rotare uno dei due $S_{2\nu}$ intorno allo $S_{2\nu-1}$ sino a farlo coincidere con l'altro. Vediamo che cosa rimane invariato in questa operazione: evidentemente gli elementi contenuti nello $S_{2\nu}$, cioè gli elementi di ordine ν, E_ν (³), di tutte le curve tracciate sulla rigata. Gli elementi di una curva fino a quello d'ordine ν ne definiscono le prime $\nu-1$ curvature: queste dunque rimangono invariate insieme coll'elemento lineare nella trasformazione fatta. La curva γ, com'era prevedibile per analogia col caso $\nu=1$, si comporta in modo eccezionale. Infatti essa gode della proprietà

(¹) Nella mia Memoria: *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* (Rend. Circ. matem. di Palermo, tom. XXXVII, 1914), § 3.

(²) *Alcune proprietà* ecc., loc. cit., § 2.

(³) *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* (Atti R. Accad. delle scienze di Torino, vol. XLVIII, 1912-1913), n. 2.

caratteristica seguente [1]: i suoi S_ν osculatori sono immersi negli $S_{2\nu-1}$ sopra nominati, e quindi un $S_{2\nu}$ contiene un $S_{\nu+1}$ osculatore a γ; perciò nell'applicare nel modo indicato la rigata sopra un $S_{2\nu}$, la curva mantiene inalterate le sue prime ν curvature. S'intende che la curva σ, che ha per $S_{2\nu}$ osculatori quelli nominati, mantiene inalterate nella deformazione tutte le $2\nu-1$ prime curvature.

Ora si può ragionare più in generale come s'è fatto nel caso delle sviluppabili ordinarie; si giunge con ciò al resultato:

II. *Una rigata d'indice di sviluppabilità ν, immersa in uno spazio qualsiasi S_n $(n > 2\nu)$, può sempre applicarsi sopra un S_h $(n > h \geq 2\nu)$ mantenendo inalterati gli elementi lineari e tutte le curvature, fino alla $(h-\nu-1)$-esima inclusa, di ogni curva tracciata sulla superficie. Esiste su di essa una curva (la γ) che mantiene inalterata anche la $(h-\nu)$-esima curvatura. La deformazione si opera facendo ruotare gli S_h, individuati da $h-\nu+1$ generatrici successive, intorno agli S_{h-1} in essi contenuti e individuati da $h-\nu$ generatrici: la rotazione dev'esser tale da portare tutti gli S_h a coincidere.*

3. Cerchiamo d'invertire la proprietà ora trovata per le rigate di indice di sviluppabilità ν: il caso $\nu = 1$ ci avverte in che modo dovrà farsi quest'inversione. Infatti in tal caso si dimostra (ciò che Monge riteneva superfluo) che, se una superficie di S_3 è applicabile sul piano, essa è rigata con indice di sviluppabilità 1. Qui si vede comparire una limitazione nella dimensione dell'ambiente, a cui la superficie deve appartenere, che non figura nel teorema diretto: e questa limitazione è essenziale, perchè una superficie di S_4 applicabile sul piano può anche non esser rigata [2]. Si prevede dunque che il teorema che abbiamo in vista, posto che sia vero, potrà enunciarsi così:

III. *Le superficie rigate di $S_{2\nu+1}$ applicabili sopra un $S_{2\nu}$ in modo che si conservino gli elementi lineari e le prime $\nu-1$ curvature di qualsiasi curva tracciata su di esse, hanno necessariamente il primo indice di sviluppabilità ν.*

S'è dovuta enunciare esplicitamente anche la condizione che la superficie sia rigata, perchè essa non è conseguenza della dimensione dello spazio d'immersione e delle condizioni d'applicabilità (al contrario di ciò che accade nello spazio ordinario); vale infatti il teorema (del quale il precedente è un corollario immediato):

IV. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie di $S_{2\nu+1}$ sia applicabile sopra un $S_{2\nu}$ in modo da conservare gli elementi lineari e le prime $\nu-1$ curvature di qualsiasi curva tracciata su di essa, è che*

[1] Per $\nu = 2$, cfr. *Alcune proprietà*.., loc. cit., n. 3; e poi ibidem n. 7.

[2] Cfr. Killing: *Nicht-Euklidische Geometrie in analytischer Behandlung.*

la superficie possegga ∞^1 *sezioni negli* S_1 *osculatori ad una curva* (*coi casi degeneri*).

È appunto ciò che ora vogliamo provare.

4. Per rendere più chiara la dimostrazione, riprendiamo quella per lo spazio ordinario [1]: nel corso del ragionamento vedremo quali sono le nozioni da estendere per trasportare la dimostrazione al caso generale, negli iperspazî.

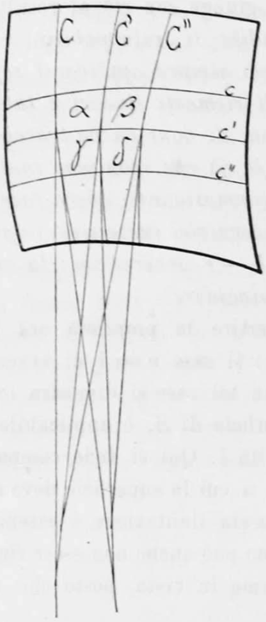

Fig. 1.

Sia dunque una superficie in S_3: tracciamo su di essa un sistema semplicemente infinito di linee (curve c) e costruiamo il sistema coniugato (curve C). Consideriamo la curva c passante per un punto P: la striscia infinitesima di superficie compresa fra la c e la curva infinitamente vicina c' può applicarsi sopra un piano che rotoli sulla sviluppabile circoscritta alla superficie lungo c. Supponiamo, ora, che tutta la superficie sia applicabile sul piano: consideriamo gli elementi di superficie vicini a P e compresi fra le curve c, c', c'', e C, C', C'', denotiamoli, come in figura, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Se l'intersezione dei due elementi superficiali γ e δ non coincide con quella dei piani di α e β (cioè se γ e δ non appartengono alla svilup-

[1] Non conosco una dimostrazione sintetica semplice di questo teorema; l'averlo Monge ritenuto evidente, ha forse distolto i geometri della sua scuola dall'occuparsene. Quanto alle dimostrazioni analitiche, invece, esse abbondano.

pabile anzidetta), non è possibile far ruotare questi due piani fino a sovrapporli, senza alterare gli elementi lineari, se non si staccano gli elementi γ e δ lungo la loro linea d'intersezione.

Si facciano ora ruotare γ e δ in modo da portarli sullo stesso piano su cui si sono adagiati α e β: i lembi del taglio eseguito per staccare γ da δ ruotano anch'essi e, data l'arbitrarietà delle linee c (o, se si vuole, delle C), non vengono a sovrapporsi di nuovo sul piano: sicchè si avrà o una duplicatura o uno strappo della superficie nelle adiacenze di P. Ciò si evita solo se gli elementi superficiali γ e δ appartengono alla sviluppabile detta, cioè se la nostra superficie coincide con essa. c. d. d.

Per questa dimostrazione è essenziale di notare:

1) che una superficie di S_3 è divisibile in elementi (infinitesimi) piani mediante un doppio sistema coniugato;

2) come devono esser saldati questi diversi elementi lungo le linee di un sistema perchè possa farsi l'applicazione richiesta.

5. Per estendere questa dimostrazione al caso che abbiamo in vista, occorre trovare sulle superficie di $S_{2\nu+1}$ un sistema di curve definito da una proprietà analoga a quella che serve a definire i sistemi coniugati in S_3.

Consideriamo a tal fine una curva tracciata regolarmente sulla superficie e i piani tangenti a questa in $\nu+1$ punti infinitamente vicini della curva. Siccome ciascun piano tangente contiene il punto di contatto del successivo, lo spazio di ν piani tangenti consecutivi è un $S_{2\nu}$ che taglia il $(\nu+1)$-esimo piano tangente lungo una retta passante per il punto di contatto di questo piano: questa tangente può considerarsi come coniugata all'elemento d'ordine ν, E_ν (individuato da $\nu+1$ punti successivi) di curva assegnato.

Sicchè, dato sulla superficie un sistema semplicemente infinito di curve c, rimane definito un sistema semplicemente infinito di curve C (inviluppate dalle tangenti costruite) che potrà dirsi coniugato d'ordine ν col precedente; però, appena ν superi l'unità, non c'è reciprocità fra i due sistemi di curve c e C. Si estende invece quella proprietà dei sistemi coniugati che ci è servita nella dimostrazione:

Le tangenti coniugate agli elementi d'ordine ν di una curva formano una rigata d'indice di sviluppabilità ν (1); il che è incluso nella definizione stessa di quelle tangenti.

6. Ciò posto, è facile di estendere la dimostrazione; supponiamo, per semplificare il linguaggio, $\nu=2$. Si ha dunque in S_5 una superficie che si sa essere applicabile sopra un S_4 in modo da conservare inalterata la prima curvatura di tutte le sue curve. Tracciamo ad arbitrio, su di essa, un sistema ∞^1 di curve c, e le loro coniugate di second'ordine, C. Si conside-

(1) Mentre la rigata generale dello $S_{2\nu+1}$ ha il primo indice di sviluppabilità $=\nu+1$.

rino gli elementi superficiali contigui disposti come in figura. Si fa presto ad applicare la striscia di superficie $c\,c'$ sopra un S_4 in modo da soddisfare alle condizioni volute.

Infatti basta applicare sopra un S_4 la rigata d' indice di sviluppabilità 2 circoscritta alla superficie lungo c (ciò è possibile nelle condizioni richieste, per il teor. II): in questa deformazione le coppie di elementi su-

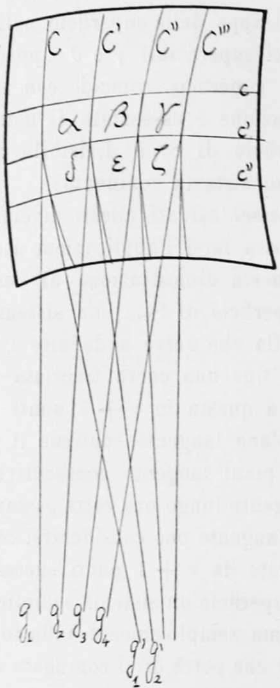

Fig. 2.

perficiali contigui si muovono come se fossero rigidamente connessi, e quindi si conserva la prima curvatura di ogni curva della striscia. Ora pensiamo alle striscie successive. Per la stessa ragione la deformazione precedente dev' esser tale da lasciar rigide le coppie di elementi superficiali $(\delta\,,\varepsilon)$, $(\varepsilon\,,\zeta)$.... ; ciò non è possibile se non quando gli S_3, come $(g_1\,g_2)$ e $(g'_1\,g'_2)$, coincidono.

Si consideri infatti l' elemento lineare comune a β ed ε, che indicheremo con β/ε: quando si fa rotare lo S_4 $(g_1\,g_2\,g_3)$ intorno allo S_3 $(g_1\,g_2)$, l'elemento β/ε assume ∞^1 posizioni, e altrettanto accade se si fa rotare lo $S_4\,(g'_1\,g'_2\,g'_3)$ intorno allo $S_3\,(g'_1\,g'_2)$; se questi due S_3 non coincidono le due serie di ∞^1 posizioni assunte da β/ε non hanno in comune se non la posizione iniziale: ciò che porta di necessità uno strappamento della superficie nella deformazione da eseguire. Sicchè intanto si ricava come condizione necessaria per l'applicabilità nel senso definito, che siano coincidenti gli S_3 $(g_1\, g_2)$ e $(g'_1\, g'_2)$, ecc.: da ciò segue che le curve C debbono essere nei piani osculatori ad una curva (e casi proiettivamente degeneri), altrimenti la superficie starebbe tutta in S_3.

La condizione trovata è anche sufficiente. Infatti si consideri la curva alla quale quegli S_3 sono osculatori, e gli S_4 ad essa osculatori: con opportuna rotazione di questi S_4 intorno agli S_3 in essi contenuti si possono portare tutti gli S_4 a coincidere; e poichè ogni S_4 contiene almeno due elementi successivi di qualsiasi curva della superficie, il teorema IV è dimostrato (per $\nu = 2$).

Analogamente si procede per ν qualsiasi.

7. Se la superficie è rigata le sue generatrici (curve C) sono immerse negli S_ν osculatori ad una curva: è questa una proprietà caratteristica delle rigate d'indice di sviluppabilità ν (1). È così provato anche il teorema III.

Matematica. — *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie.* Nota di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. In una mia Nota, apparsa recentemente in questi Rendiconti (2), ho dimostrato che, data l'equazione, a nucleo simmetrico,

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(st)\, h(t)\, dt\,, \tag{1}$$

posto

$$\mathrm{V}_n = \int_a^b [g_n(s)]^2\, ds \quad ; \quad \frac{\mathrm{V}_{n+1}}{\mathrm{V}_n} = \mathrm{C}_n\,,$$

si ha

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{C}_n = \mathrm{C}\,,$$

dove C è una quantità finita, positiva e diversa da zero; ed inoltre che l'essere le costanti C_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ tutte eguali tra loro, ovvero (ciò che è lo stesso) l'essere soddisfatta l'eguaglianza $g(s) = \dfrac{g_2(s)}{\mathrm{C}_0}$ è condizione *sufficiente* perchè la (1) ammetta soluzioni; in tale caso, una di queste è data da

$$h(t) = \frac{g_1(t)}{\mathrm{C}_0}\,.$$

(1) *Alcune proprietà* ecc., loc. cit., n. 5.
(2) *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (seduta dell'8 nov. 1914).