ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

adunque, sia per lo spettro che fornisce, sia per il modo come viene riassorbito dagli elettrodi, sia per quanto riguarda il suo comportamento per la emissione dei raggi X, completamente diverso dall'aria.

Che cosa sia questo gas, se cioè esso sia uno degli ossidi dell'azoto proveniente per il diverso assorbimento da parte degli elettrodi dei due gas principali contenuti nell'aria, ovvero sia un gas alla cui formazione prenda parte qualche altro elemento contenuto come impurezza nell'alluminio non mi è possibile precisare non avendo potuto approfondire la ricerca spettroscopica: le osservazioni finora fatte non mi forniscono indicazioni sufficienti per un giudizio sicuro: ma su questo intendo compiere ulteriori esperienze.

Le due ultime serie riferite dimostrano ancora quale importanza abbia sulla pressione di massima emissione dei raggi X, ed in generale su tutto l'andamento dell'emissione dei raggi medesimi, la diversa natura del gas contenuto. Dal complesso però di tutte le serie fatte durante il processo di esaurimento del tubo, ho riconosciuto che le curve di emissione dei raggi X con la pressione variano continuamente e dipendono essenzialmente dalle condizioni superficiali degli elettrodi dai quali la scarica si diparte; solo ad esaurimento quasi compiuto la legge di emissione dei raggi X si presenta costante, così che i raggi X cominciano sempre alla stessa pressione che è pure costante: ma anche di questi fenomeni, che escono dai limiti di questa Nota, e che sono molto complessi, mi riserbo di riferire prossimamente.

Matematica. — *Sopra un sistema di equazioni algebriche.* Nota di A. Cecconi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In certe questioni di Statistica si presenta talvolta il problema che con linguaggio matematico si può esprimere nel modo seguente:

Dato un sistema di $m \cdot n$ numeri reali a_{rs} disposti in righe ed in colonne, formanti cioè una matrice rettangolare, determinare $m+n$ quantità pure reali, $x_1, x_2, \dots, x_m$; $y_1, y_2, \dots, y_n$, per modo che valgano le eguaglianze:

$$(1)\qquad \begin{cases} x \sum_1^n {}_r\, a_{ir}\, y_r = \mathrm{A}_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ y_j \sum_1^m {}_s\, a_{sj}\, x_s = \mathrm{B}_j & (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

nelle quali, A_i e B_j sono numeri assegnati tutti diversi da zero e legati dalla relazione

$$\sum_1^m {}_r\, \mathrm{A}_r = \sum_1^n {}_s\, \mathrm{B}_s = \mathrm{D}\,.$$

Concettualmente la questione è esaurita, essendo ricondotta alla discussione di un sistema di equazioni algebriche (di 2° grado), se non che i metodi generali di eliminazione sono in pratica inapplicabili. Era quindi necessaria la ricerca di un algoritmo che permettesse di calcolare, con quella approssimazione che più aggrada, almeno una soluzione del sistema di equazioni (1). Il metodo che andrò esponendo consente, sotto certe condizioni affatto restrittive per le applicazioni statistiche, il suddetto calcolo.

1. Conviene anzitutto osservare che, soddisfatte $n+m-1$ equazioni, di necessità risulta soddisfatta anche la rimanente; e che, se

$$x_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

è una soluzione, ponendo

$$x_i = \varrho \,.\, \alpha_i$$

$$y_j = \frac{1}{\varrho} \cdot \beta_j ,$$

ϱ designando un numero diverso da zero, si ottiene una nuova soluzione, che sarà però da riguardarsi come sostanzialmente coincidente con la prima. Inoltre, poichè per la natura stessa del sistema (1) non può alcuna delle α e delle β essere eguale a zero, si potrà sempre fare in modo, determinando opportunamente ϱ, che una delle incognite acquisti un valore arbitrariamente prefissato. Potremo quindi limitarci alla ricerca di quelle soluzioni per le quali è $y_n = 1$; e reciprocamente, assegnando una soluzione, supporre sempre ch'essa sia tale da attribuire all'incognita y_n il valore 1.

Nel seguito, una soluzione si dirà *uniforme*, se per essa tutte le incognite acquistano valori del medesimo segno.

2. Ciò premesso, dimostriamo che:

Se i coefficienti a_{rs} e i termini noti A_i e B_j del sistema di equazioni (1) sono tutti diversi da zero e del medesimo segno, esiste una, ed una sola, soluzione uniforme.

Esistenza della soluzione uniforme. — Poniamo infatti:

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \cdots = y_{n-1}^{(0)} = 0 ,$$

e consideriamo, per $p = 1, 2, \dots,$ le seguenti successioni:

$$x_i^{(p)} = \frac{A_i}{\sum_1^{n-1}{}_s\, a_{is}\, y_s^{(p-1)} + a_{in}} \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{2}$$

$$y_j^{(p)} = \frac{B_j}{\sum_1^{m}{}_r\, a_{rj}\, x_r^{(p)}} \qquad (j = 1, 2, \dots, n-1), \tag{3}$$

la legge di formazione delle quali è senz'altro manifesta dalla semplice ispezione dei secondi membri delle (2) e delle (3).

Si osservi, poi, che, essendo ogni $y_j^{(1)}$ diversa da zero, il denominatore di ciascuna $x_i^{(2)}$ è maggiore di quello della corrispondente $x_i^{(1)}$; perciò si ha:

$$x_i^{(1)} > x_i^{(2)}.$$

Ammesso ora come provato che, per ogni valore dell'indice i, sia

$$x_i^{(p-1)} > x_i^{(p)},$$

facilmente dimostreremo che vale una disuguaglianza analoga fra i termini $x_i^{(p)}$ e $x_i^{(p+1)}$. Infatti, basta notare, che per le (3), il denominatore di $y_j^{(p-1)}$ (j generico) supera quello del termine successivo $y_j^{(p)}$, e quindi è:

$$y_j^{(p-1)} < y_j^{(p)};$$

poichè allora, osservando che il denominatore di $x_i^{(p)}$ è minore di quello di $x_i^{(p+1)}$, ne scende subito che dev'essere

$$x_i^{(p)} > x_i^{(p+1)}.$$

Le $x_i^{(p)}$ costituiscono perciò m successioni decrescenti; e, conseguentemente, le $y_i^{(p)}$ rappresentano $n-1$ successioni crescenti.

Ora si osservi che, se fra queste ultime ve ne fossero di divergenti, tutte le $x_i^{(p)}$ dovrebbero essere infinitesime. Ma poichè ciò è da escludersi, avendo sempre, per qualunque p,

$$\sum_1^m{}_r\, a_{rn}\, x_r^{(p)} > B_n \text{ [1]},$$

si dovrà concludere che ogni $y_j^{(p)}$ tende ad un limite finito che indicheremo con β_j.

[1] Infatti, poichè è $y_j^{(p)} > y_i^{(p-1)}$, dalle (2) si ricava:

$$\sum_1^{n-1}{}_r \sum_1^m{}_s\, a_{sr}\, x_s^{(p)}\, y_r^{(p)} + \sum_1^m{}_r\, a_{rn}\, x_r^{(p)} > \sum_1^m{}_r\, A_r;$$

e dalle (3):

$$\sum_1^{n-1}{}_s \sum_1^m{}_r\, a_{rs}\, x_r^{(p)}\, y_s^{(p)} = \sum_1^{n-1}{}_s\, B_s,$$

donde, tenuta presente la relazione fra i termini noti A_i e B_j, scende:

$$\sum_1^m{}_r\, a_{rn}\, x_r^{(p)} > B_n. \qquad \text{c. d. d.}$$

Dalle (2) risulta allora, che le successioni $x_i^{(p)}$ convergono verso limiti positivi

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\sum_1^{n-1}{}_s\, a_{is}\, \beta_s + a_{in}}\,.$$

Se ne inferisce, passando al limite anche nelle (3), che, ponendo

$$x_i = \alpha_i \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots\,, m)$$
$$y_j = \beta_j \qquad (j = 1\,, 2\,, \ldots\,, n-1)$$
$$y_n = 1\,,$$

si ottiene una soluzione uniforme del sistema di equazioni (1).

Unicità della soluzione. — Ammettiamo, ora, che esista un'altra soluzione uniforme:

$$x_i = \mu_i \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots\,, m)$$
$$y_j = \nu_j \qquad (j = 1\,, 2\,, \ldots\,, n)\,,$$

e ricordiamo che, per quanto abbiamo detto sopra, possiamo supporre $\nu_n = 1$, e quindi μ_i e ν_j positivi.

Avendo noi assunti tutti eguali a zero i valori degli elementi $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}$, a norma delle (2) si avrà manifestamente:

$$x_i^{(1)} > \mu_i\,;$$

e quindi, per le (3), anche

$$y_j^{(1)} < \beta_j\,.$$

Facendo ora un ragionamento induttivo analogo ad uno esposto precedentemente, possiamo provare che tutti i termini della successione $x_i^{(p)}$ sono maggiori di μ_i, e che ogni elemento della successione $y_j^{(p)}$ è minore di ν_j, donde scende che dev'essere

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha_i \geq \mu_i & (i = 1\,, 2\,, \ldots\,, m) \\ \beta_j \leq \nu_j & (j = 1\,, 2\,, \ldots\,, n-1). \end{cases}$$

Ma dovendo valere l'identità

$$\sum_1^m{}_r\, a_{rn}(\alpha_r - \mu_r) = 0\,,$$

i segni di disuguaglianza delle (4) non possono sussistere, e perciò la seconda soluzione coincide con la prima

c. d. d.

Come ovvia conseguenza di quanto venne dimostrato, abbiamo:

Se i termini noti del sistema di equazioni (1) *hanno tutti il medesimo segno opposto a quello comune ai coefficienti, esiste una, ed una sola, soluzione per cui tutte le x assumono valori negativi mentre tut le y assumono valori positivi.*

3. Stabilita la esistenza e la unicità della soluzione uniforme, osserviamo che nelle successioni (2) le $x_i^{(1)}$ acquistano ordinatamente i valori $\frac{A_i}{a_{in}}$. Mutando questi, si può dubitare che le successioni generate dalle formole ricorrenti (2) e (3) conservino la convergenza. Perciò dimostriamo che:

Qualunque siano i valori positivi che si attribuiscono agli elementi $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}$, *si ha sempre*

$$\lim_{p=\infty} x_i^{(p)} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\lim_{p=\infty} y_j^{(p)} = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Infatti, essendo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ dei numeri positivi qualunque, e posto

$$x_i^{(1)} = c_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

possiamo determinare m numeri h_i maggiori di -1, per modo che sia:

$$c_i = \alpha_i(1 + h_i).$$

Indichiamo con H un numero positivo arbitrario non minore del massimo degli h_i, ed analogamente con h un numero positivo minore di 1, ma, del resto, qualunque, purchè $-h$ non superi il minimo degli h_i. Necessariamente sarà

$$\alpha_i(1 - h) \leq c_i \leq \alpha_i(1 + \mathrm{H}),$$

dalle quali, tenuto presente che è

$$y_j^{(1)} = \frac{\mathrm{B}_j}{\sum_1^m {}_r\, a_{rj}\, c_r},$$

scendono le disuguaglianze

$$\frac{\beta_j}{1 + \mathrm{H}} \leq y_j^{(1)} \leq \frac{\beta_i}{1 - h};$$

e posto

$$h_i^{(1)} = h\,\frac{\mathrm{A}_i - a_{in}\,\alpha_i}{\mathrm{A}_i - h a_{in}\,\alpha_i} \quad ; \quad \mathrm{H}_i^{(1)} = \mathrm{H}\,\frac{\mathrm{A}_i - a_{in}\,\alpha_i}{\mathrm{A}_i + \mathrm{H} a_{in}\,\alpha_i},$$

con facili semplificazioni si ricava:

$$(4) \qquad \alpha_i(1 - h_i^{(1)}) \leq x_i^{(2)} \leq \alpha_i(1 + \mathrm{H}_j^{(1)}).$$

E poichè, come si verifica subito, se, per un determinato valore di $\varrho > -1$, il rapporto

$$\frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r + \varrho a_{rn}\,\alpha_r}$$

è il massimo dei numeri

$$\frac{\mathrm{A}_i - a_{in}\,\alpha_i}{\mathrm{A}_i + \varrho a_{in}\,\alpha_i}\,,$$

esso rimane il massimo, qualunque sia il valore che si attribuisce a ϱ, purchè maggiore di -1, dovranno valere le relazioni:

$$h_i^{(1)} \leq h_r^{(1)} = h\,\frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r - h a_{rn}\,\alpha_r}\,,$$

$$\mathrm{H}_i^{(1)} \leq \mathrm{H}_r^{(1)} < \mathrm{H}\,\frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r}\,,$$

che, ponendo, per brevità,

$$\tau = \frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r - h a_{rn}\,\alpha_r}\ , \quad \sigma = \frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r}\,,$$

equivalgono alle seguenti:

$$h_i^{(1)} \leq h\,.\,\tau = h^{(1)}\ , \quad \mathrm{H}_i^{(1)} < \mathrm{H}\,.\,\sigma = \mathrm{H}^{(1)}\,.$$

Per le (5), abbiamo inoltre:

$$\alpha_i(1 - h^{(1)}) \leq x_i^{(2)} < \alpha_i(1 + \mathrm{H}^{(1)})\,,$$

dalle quali risulta che i numeri $h^{(1)}$ e $\mathrm{H}^{(1)}$ soddisfanno, rispetto ai numeri $h_i^{(1)}$, alle medesime condizioni cui soddisfanno i numeri h ed H rispetto agli h_i.

In generale, ammesso di conoscere due numeri,

$$h^{(p-1)} = h\tau^{p-1}\ , \quad \mathrm{H}^{(p-1)} = \mathrm{H}\sigma^{p-1}\,,$$

tali che sia

$$\alpha_i(1 - h^{(p-1)}) < x_i^{(p)} < \alpha_i(1 + \mathrm{H}^{(p-1)})\,,$$

con un ragionamento del tutto analogo al precedente, che per brevità omettiamo, si può dimostrare la esistenza di un'altra coppia di numeri

$$h^{(p)} = h\tau^{p}\ , \quad \mathrm{H}^{(p)} = \mathrm{H}\sigma^{p}\,,$$

tale che fra i numeri $\alpha_i(1 - h^{(p)})$ e $\alpha_i(1 + \mathrm{H}^{(p)})$ sia sempre compreso l'elemento $x_i^{(p+1)}$.

Notando, infine, che le successioni $h^{(p)}$ ed $H^{(p)}$ tendono a zero, perchè i numeri τ e σ sono entrambi minori dell'unità, concludiamo che, per un i generico, è

$$\lim_{p=\infty} x_i^{(p)} = \alpha_i \,,$$

e, a norma delle (3), anche

$$\lim_{p=\infty} y_j^{(p)} = \beta_j \,.$$

c. d. d.

4. Se m numeri $c_1, c_2, \ldots, c_m$, sono ordinatamente maggiori di α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$, diremo che costituiscono un'*emmupla di eccesso*, e similmente diremo che costituiscono un'*emmupla di difetto* se ciascun c_i è minore del valor limite corrispondente. È facile riconoscere che, partendo da un'emmupla di eccesso, le $x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_m^{(p)}$, costituiscono ancora emmuple di eccesso, mentre le $y_j^{(p)}$ sono minori dei relativi limiti; partendo invece da un'emmupla di difetto, le successive $x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_m^{(p)}$ formano emmuple di difetto, e le $y_j^{(p)}$ si mantengono tutte superiori ai corrispondenti limiti.

Abbiamo inoltre:

Condizione sufficiente perchè un dato sistema di valori c_i costituisca un'emmupla di eccesso, è che sia:

$$c_i > x_i^{(2)} \,. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Ciò, infatti, risulta subito dall'osservare che in tal caso, con un ragionamento esposto al n. 2, si dimostra che le successioni (2) sono tutte decrescenti.

In modo analogo si può provare che:

Condizione sufficiente perchè un dato sistema di numeri c_i costituisca un'emmupla di difetto, è che sia:

$$c_i < x_i^{(2)} \,. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

5. Da quanto venne esposto si ricava un metodo per l'effettivo calcolo della soluzione uniforme del sistema di equazioni (1). Basterà infatti, assegnati m valori positivi arbitrarî per gli elementi $x_i^{(1)}$, servirsi delle formole (2) e (3) per la determinazione delle successive approssimazioni. Per rendere più breve il calcolo, converrà partire da valori quanto più prossimi è possibile ai valori limiti. A questo scopo possono essere di guida le seguenti osservazioni:

a) Badando alle (2) ed al fatto che dev'essere soddisfatta l'equazione

$$(6) \qquad \sum_1^m{}_r \, a_{rn} \, x_r = B_n \,,$$

si riconosce che ciascuna α_i è minore del più piccolo dei numeri $\dfrac{A_i}{a_{in}}$ e $\dfrac{B_n}{a_{in}}$.

b) Se le colonne della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni (1) sono fra loro proporzionali, ed in particolare, quindi, se sono fra loro eguali, è, come subito si verifica,

$$\alpha_i = \frac{A_i\, B_n}{a_{in}\, D} \quad , \quad \beta_j = \frac{B_j\, a_{rn}}{B_n\, a_{rj}} ,$$

nelle quali l' indice r è arbitrario, essendo, per l' ipotesi supposta, il valore del rapporto $\frac{a_{rn}}{a_{rj}}$ dipendente dal solo indice j.

c) Se i numeri c_i, che si attribuiscono alle $x_i^{(1)}$, soddisfanno alla (6), alcuni di essi sono *in generale* maggiori, e gli altri minori dei rispettivi limiti.

Tali sono, ad esempio, i numeri $\frac{A_i\, B_n}{a_{in}\, D}$.

6. Partendo da un'emmupla di eccesso, è facile assegnare un limite superiore dell'errore che si commette arrestandosi ad una approssimazione di un dato ordine p, quando cioè si assumono per le x_i e le y_j le determinazioni $x_i^{(p)}$ ed $y_j^{(p)}$ anzichè i rispettivi limiti α_i e β_j.

Siano c_i i valori attribuiti alle $x_i^{(1)}$ e sia g_i un'emmupla di difetto. Indichiamo con $\varepsilon_i^{(p)}$ la differenza $x_i^{(p)} - \alpha_i$, con R il maggiore dei numeri $c_i - g_i$ e poniamo

$$g_i = \frac{A_i}{a_{in}}\, q_i ,$$

con che le q_i risultano necessariamente frazioni proprie.

Tenuto presente quanto venne esposto al numero 3, ed osservato che il prodotto $H\alpha_i$ può sempre supporsi minore di R, sarà:

$$\varepsilon_i^{(p)} < H\alpha_i \left(\frac{A_i - a_{in}\, \alpha_i}{A_i} \right)^{p-1} < R \left(\frac{A_i - a_{in}\, g_i}{A_i} \right)^{p-1} < R\,(1 - q_i)^{p-1} .$$