ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Sulla definizione di arco di una curva e dell'integrale di Weierstrass, che si presenta nel calcolo delle variazioni*. Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Corrispondente O. TEDONE.

I risultati di questa Nota non sono completamente nuovi; li pubblico, perchè la seguente dimostrazione è semplicissima, e, senza artificio alcuno, giunge ai risultati più generali nel modo più breve.

Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ funzioni continue a variazione limitata, le quali nell'intervallo $a \leq t \leq b$ definiscono una curva continua rettificabile. L'arco s di questa curva è dato da $\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$, allora, e allora soltanto, che $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ siano assolutamente continue. Questo teorema, ottenuto con successive generalizzazioni da Lebesgue, De la Vallée-Poussin e Tonelli, si può (Tonelli) dimostrare facilmente con un semplice artificio dovuto al De la Vallée-Poussin.

Possiamo in tal caso assumere al posto del parametro t il parametro s, o, senz'altro, supporre $t = s$.

Consideriamo una poligonale P inscritta nella curva, avente i vertici successivi nei punti $t_1 = a$, $t_2 > t_1$, $t_3 > t_2$, ... , $t_n = b$. Al variare della P in modo che *la massima delle* $t_{n+1} - t_n$ *tenda a zero*, il perimetro di P *avrà per limite la lunghezza* $b - a$ *dell'arco di curva dato*.

Sia P una delle nostre poligonali; noi potremo ancora definire le coordinate di un suo punto come date da equazioni $x = \overline{x}(t)$, $y = \overline{y}(t)$, $z = \overline{z}(t)$ (per $a \leq t \leq b$) in molteplici modi. E noi fisseremo che un vertice della poligonale, il quale è pure un punto della curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ data, sia definito dallo stesso valore di t, vuoi come punto della curva, vuoi come punto della poligonale; che cioè, nelle nostre notazioni, sia $x(t_r) = \overline{x}(t_r)$, $y(t_r) = \overline{y}(t_r)$, $z(t_r) = \overline{z}(t_r)$ per $r = 1 , 2 , ... , n$. E ancora fisseremo che per $t_r \leq t \leq t_{r+1}$ le $\overline{x}(t)$, $\overline{y}(t)$, $\overline{z}(t)$ siano funzioni lineari della t. Con queste convenzioni, data la poligonale P, restano completamente individuate le $\overline{x}(t)$, $\overline{y}(t)$, $\overline{z}(t)$. Tra i punti di P e i punti della data curva resta così definita una corrispondenza, in cui due punti sono considerati corrispondenti quando corrispondono ad uguali valori del parametro t. In questa corrispondenza i vertici di P corrispondono a se stessi.

Noi ora proveremo che: *Se* P *varia così che la massima delle* $t_{r+1} - t_r$ *tenda a zero*, per ogni valore di t, per cui esistono e sono finiti $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, cioè *per quasi tutti i valori di* t, *è*

$$\lim \overline{x}'(t) = x'(t) \ , \ \lim \overline{y}'(t) = y'(t) \ , \ \lim \overline{z}'(t) = z'(t) .$$

In altre parole, le derivate di x, y, z calcolate in un punto della poligonale P hanno per limite le derivate analoghe calcolate nel punto corrispondente della curva data.

Sia t un valore per cui esista $x'(t)$. Il punto corrispondente della curva, e il punto omologo di P, si troveranno rispettivamente su un archetto di tale curva e su quel lato di P che ne congiunge gli estremi. Siano t_r, t_{r+1} i due vertici estremi comuni di tale archetto e di tale lato. Senza escludere che il punto considerato sia esso stesso un vertice di P, sarà $t_r \leq t \leq t_{r+1}$. La derivata $\overline{x}'(t)$ è costante sul lato considerato della nostra poligonale, e vale

$$\overline{x}'(t) = \frac{\overline{x}'(t_{r+1}) - \overline{x}'(t_r)}{t_{r+1} - t_r} = \frac{x(t_{r+1}) - x(t_r)}{t_{r+1} - t_r}.$$

Ora

$$\begin{aligned} x(t_{r+1}) &= x(t) + (t_{r+1} - t)\, x'(t) + \varepsilon(t_{r+1} - t) \\ x(t_r) &= x(t) - (t - t_r) \quad x'(t) - \eta(t - t_r), \end{aligned}$$

dove ε, η tendono a zero con $t_{r+1} - t_r$. Dunque

$$\overline{x}'(t) = x'(t) + \frac{\varepsilon(t_{r+1} - t) + \eta(t - t_r)}{t_{r+1} - t_r} = x'(t) + \varepsilon + (\eta - \varepsilon)\frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r}.$$

Osservando che $0 \leq \dfrac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} \leq 1$, se ne deduce che, per $t_{r+1} - t_r = 0$, è appunto $\overline{x}'(t) = x'(t)$, ecc., come volevasi provare.

L'applicazione all'integrale di Weierstrass è immediata.

Sia $f(x, y, z; x', y', z')$ una funzione finita e continua e quindi anche limitata, fino a che (x, y, z) varia in un certo dominio Γ, e x', y', z' soddisfano alla $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. La f sia positivamente omogenea di grado 1; cioè, per ogni valore del numero $k > 0$, sia

$$f(x, y, z; x', y', z') = f(x, y, z; kx', ky', kz').$$

Sia C una curva rettificabile interna a Γ, di cui $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ definiscano un punto generico A, in funzione dell'arco s misurato da un estremo di C fino al punto A. Lo $\mathrm{J} = \int f(x, y, z; x', y', z')\, ds$, *esteso a tale curva* C, *è, secondo Weierstrass, il limite dell'integrale analogo relativo ad una poligonale* P *inscritta in* C, quando il massimo lato di P tende a zero. Evidentemente questa definizione non muta se poniamo le equazioni parametriche di P sotto la forma $x = \overline{x}(t)$, $y = \overline{y}(t)$, $z = \overline{z}(t)$, dove t è il parametro sopra definito, e consideriamo J come il limite dell' integrale (calcolato secondo Riemann)

$$\int f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}_t', \bar{y}_t', \bar{z}_t')\, dt \tag{1}$$

esteso a P, quando il massimo lato di P tende a zero.

Ora è ben evidente che $\bar{x}'^2(t) + \bar{y}'^2(t) + \bar{z}'^2(t) \leq 1$.

Quindi $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ è *limitato*, se la poligonale P ha i lati così piccoli che ogni suo punto appartenga a Γ. Per un noto teorema del Lebesgue, il limite di (1) coincide con l' integrale del $\lim f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ *calcolato al modo del Lebesgue*. E per i nostri risultati precedenti ($\lim \bar{x}' = x'$, ecc.), ne concludiamo:

Per le curve rettificabili, l'integrale di Weierstrass è uguale all'integrale del Lebesgue [1].

Meccanica. — *Nuovi tipi di onde periodiche permanenti e rotazionali.* Nota II di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

6. Per integrare la (15) [2],

$$\dot{\eta}^2 = \frac{2}{\varrho}(\eta - 1)(k - \eta)(\eta + k'), \tag{15}$$

[1] Questo teorema è stato per tutt'altra via ottenuto, in casi meno generali, dal prof. Tonelli nel tomo 32 (1911) dei Rendic. del Circ. matem. di Palermo; e in questi Rendic. 14 aprile 1912. In casi particolari il prof. Tonelli ha dimostrato, in più, che la rettificabilità di C è condizione necessaria affinchè l'integrale di Weierstrass sia finito.

[2] L'equazione differenziale del profilo delle onde « cnoidali » di Korteweg e De Vries è [cfr. Lamb, loc. cit., pag. 402]:

$$\dot{y}^2 = \frac{3g}{c^2 h^2}(y - l)(h_1 - y)(y - h_2),$$

dove h_1 e h_2 sono il massimo e il minimo dei valori di y, c la velocità di propagazione, e $l = \frac{c^2 h^2}{g h_1 h_2}$. Come si vede, questa equazione è del tipo (15). Tuttavia l'integrazione della (15) non si può far dipendere da quella precedente fatta da Korteweg e De Vries, e conduce, per conseguenza, ad un profilo d'onda diverso. La ragione sta nella circostanza che la costante k', che comparisce nella (15), è positiva [cfr. n. 4]; mentre la costante corrispondente nell'altra equazione è $-l$, che è negativa. Gli autori, supposto infatti $h_2 < h < h_1$, pongono

$$\beta = \sqrt{\frac{4 h_1 h_2 l}{3(h_1 - l)}}, \quad k^2 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - l},$$

e, integrando, trovano pel profilo dell'onda l'equazione

$$y = h_2 + (h_1 - h_2)\, cn^2 \frac{x}{\beta} \qquad [\mathrm{mod}\ k].$$