ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

dove t è il parametro sopra definito, e consideriamo J come il limite dell'integrale (calcolato secondo Riemann)

$$\int f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \overline{x}_t', \overline{y}_t', \overline{z}_t')\, dt \tag{1}$$

esteso a P, quando il massimo lato di P tende a zero.

Ora è ben evidente che $\overline{x}'^2(t) + \overline{y}'^2(t) + \overline{z}'^2(t) \leq 1$.

Quindi $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$ è *limitato*, se la poligonale P ha i lati così piccoli che ogni suo punto appartenga a Γ. Per un noto teorema del Lebesgue, il limite di (1) coincide con l'integrale del $\lim f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$ *calcolato al modo del Lebesgue*. E per i nostri risultati precedenti ($\lim \overline{x}' = x'$, ecc.), ne concludiamo:

Per le curve rettificabili, l'integrale di Weierstrass è uguale all'integrale del Lebesgue (¹).

Meccanica. — *Nuovi tipi di onde periodiche permanenti e rotazionali.* Nota II di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

6. Per integrare la (15) (²),

$$\dot{\eta}^2 = \frac{2}{\varrho}(\eta - 1)(k - \eta)(\eta + k'), \tag{15}$$

(¹) Questo teorema è stato per tutt'altra via ottenuto, in casi meno generali, dal prof. Tonelli nel tomo 32 (1911) dei Rendic. del Circ. matem. di Palermo; e in questi Rendic. 14 aprile 1912. In casi particolari il prof. Tonelli ha dimostrato, in più, che la rettificabilità di C è condizione necessaria affinchè l'integrale di Weierstrass sia finito.

(²) L'equazione differenziale del profilo delle onde « cnoidali » di Korteweg e De Vries è [cfr. Lamb, loc. cit., pag. 402]:

$$\dot{y}^2 = \frac{3g}{c^2 h^2}(y - l)(h_1 - y)(y - h_2),$$

dove h_1 e h_2 sono il massimo e il minimo dei valori di y, c la velocità di propagazione, e $l = \frac{c^2 h^2}{g h_1 h_2}$. Come si vede, questa equazione è del tipo (15). Tuttavia l'integrazione della (15) non si può far dipendere da quella precedente fatta da Korteweg e De Vries, e conduce, per conseguenza, ad un profilo d'onda diverso. La ragione sta nella circostanza che la costante k', che comparisce nella (15), è positiva [cfr. n. 4], mentre la costante corrispondente nell'altra equazione è $-l$, che è negativa. Gli autori, supposto infatti $h_2 < h < h_1$, pongono

$$\beta = \sqrt{\frac{4 h_1 h_2 l}{3(h_1 - l)}}, \quad k^2 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - l},$$

e, integrando, trovano pel profilo dell'onda l'equazione

$$y = h_2 + (h_1 - h_2)\, cn^2 \frac{x}{\beta} \qquad [\text{mod } k].$$

giova sostituire, alla incognita funzione η di ξ, una nuova funzione incognita p, mediante la seguente posizione:

$$\eta = \frac{p+\alpha}{p+\beta}, \tag{18}$$

dove α e β rappresentano due costanti che mi riservo di fissare in seguito in modo opportuno.

Avendosi dalla precedente, derivando,

$$\dot{\eta} = \frac{\beta-\alpha}{(p+\beta)^2}\,\dot{p}, \tag{19}$$

la (15) si trasforma, per questa e per la (16), nella seguente:

$$\dot{p}^2 = \frac{2(k-1)(k'+1)}{\varrho(\alpha-\beta)}\left[p+\beta\right]\left[p+\frac{\beta k-\alpha}{k-1}\right]\left[p+\frac{\beta k'+\alpha}{k'+1}\right];$$

oppure, notando che, per le (14),

$$(k-1)(k'+1) = \varrho - 1,$$

$$\dot{p}^2 = \frac{2(\varrho-1)}{\varrho\,.\,(\alpha-\beta)}\left[p+\beta\right]\left[p+\frac{\beta k-\alpha}{k-1}\right]\left[p+\frac{\beta k'+\alpha}{k'+1}\right]. \tag{20}$$

Ciò posto, determiniamo α e β, mediante il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \alpha-\beta = \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}, \\[2mm] \beta + \dfrac{\beta k-\alpha}{k-1} + \dfrac{\beta k'+\alpha}{k'+1} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

e ciò allo scopo, ben manifesto, di rendere $=4$ il coefficiente di p^3 nel secondo membro della (20), e di rendere nulla la somma delle radici dell'equazione $\dot{p}^2 = 0$.

Risolvendo il sistema (21), si ha, tenendo conto delle (14),

$$\alpha = \frac{5\varrho-2}{12\varrho}, \quad \beta = \frac{4-\varrho}{12\varrho}. \tag{22}$$

Come si vede tale integrale è legato al fatto che, essendo $l>0$ e $h_1-l>0$, β è reale. Nel caso nostro, l' integrale precedente non è applicabile, perchè darebbe per β un valore immaginario. D'altra parte, confrontando la precedente colla (28), si vede che le equazioni sono essenzialmente differenti, e quindi i profili delle nostre onde non sono *cnoidali*.

Posto quindi

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{\beta k-\alpha}{k-1}=\frac{(\varrho-4)\,k+5\varrho-2}{12\,\varrho\,(k-1)}=e_1\,,\\
&-\beta=\frac{\varrho-4}{12\,\varrho}=\begin{cases} e_2 \text{ se } \varrho>1\,,\\ e_3 \text{ se } \varrho<1,\end{cases}\\
&-\frac{\beta k'+\alpha}{k'+1}=\frac{(\varrho-4)\,k'-5\varrho+2}{12\,\varrho\,(k'+1)}=\begin{cases} e_3 \text{ se } \varrho>1\,,\\ e_2 \text{ se } \varrho<1\,,\end{cases}
\end{aligned}
\right.
$$

dove ora è, in ogni caso,

$$e_1+e_2+e_3=0\,,$$

la (20) diviene

$$(24)\qquad p'^2=4\,(p-e_1)\,(p-e_2)\,(p-e_3)\,.$$

La p è dunque la funzione ellittica di Weierstrass, i cui invarianti g_2 e g_3 sono notoriamente legati a e_1, e_2, e_3 dalle relazioni

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2&=-\frac{1}{4}\,g_2\,,\\
e_1\,e_2\,e_3&=\frac{1}{4}\,g_3\,.
\end{aligned}
\right.
$$

7. È facile verificare che è, in ogni caso:

$$(26)\qquad e_1>e_2>e_3\,,$$

Infatti, cominciamo a dimostrare che è sempre $e_1>0$. Il numeratore di e_1 è >0 se $\varrho>1$. ed è <0 se $\varrho<1$ [cfr. n. 5]; lo stesso dicasi del denominatore. Dunque, numeratore e denominatore di e_1 essendo sempre dello stesso segno, sarà $e_1>0$.

In quanto a e_2, esso è ≥ 0 se $\varrho\geq 4$ e in tal caso è manifestamente $e_1>e_2$. Facciamo ora vedere che in ogni caso è

$$e_2-e_3>0\,.$$

Infatti, essendo, per le (23), nel caso $\varrho>1$,

$$e_3=-(e_1+e_2)=-\frac{(\varrho-4)\,k+2\varrho+1}{6\,\varrho\,(k-1)}\,,$$

sarà

$$e_2-e_3=\frac{f(\varrho)}{12\,\varrho\,(k-1)}\,,$$

avendo posto

$$f(\varrho)=(\varrho-4)\,(3k-1)+4\,\varrho+2\,.$$

È facile il vedere che $f(\varrho) > 0$; inquantochè è $f'(\varrho) = 3(k+1) > 0$ e $f(0) = 2$.

Dopo ciò potremo concludere che, se è $\varrho > 1$, e quindi [n. 5] $k > 1$, è $e_2 - e_3 > 0$. In modo analogo si vede che se è $\varrho < 1$, essendo allora $k < 1$, è $e_2 - e_3 > 0$.

Restano intanto dimostrate le diseguaglianze (26).

8. In ogni caso, dalle (23) scende che le radici e_1, e_2, e_3 della $\dot{p}^2 = 0$, si mantengono sempre reali; perciò il discriminante

$$\Delta = \{4(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\}^2$$

è sempre positivo, e si annulla solo per $\varrho = 1$, valore che abbiamo escluso [n. 5].

In tali circostanze la funzione p ammette due periodi, 2ω e $2\omega'$, reale il primo e immaginario il secondo, definiti notoriamente dalle formule seguenti:

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\omega &= \int_{-e_1}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}}, \\ \frac{2\omega'}{i} &= \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}}. \end{aligned}\right.$$

Quest'ultimo non ha, evidentemente, alcun interesse per noi.

Ciò posto, la (18) per l'ultime delle (14), definisce in modo completo il pelo libero λ, il quale ha per equazione

$$(28)\qquad y = h\,\frac{p+\alpha}{p+\beta}, \quad \text{dove} \quad p = p(\xi) = p\left(\frac{x}{h}\right),$$

essendo α e β definite in funzioni di ϱ mediante le (22).

La eliminazione di y tra la precedente e la (12),

$$a_1 = \frac{q}{y},$$

definisce la funzione $a_1\left(\frac{x}{h}\right)$; si ottiene così

$$(29)\qquad a_1 = \frac{q}{h}\,\frac{p+\beta}{p+\alpha}, \quad \text{dove} \quad p = p\left(\frac{x}{h}\right),$$

per la quale l'espressione (10)

$$\psi = a_1 y,$$

della funzione di corrente, diviene

$$(30)\qquad \psi = \frac{q}{h}\,\frac{p+\beta}{p+\alpha}\,y\,.$$

Come si vede, si tratta di onde periodiche e di periodo $2\omega h$ definito dalla prima delle (27).

9. È interessante di stabilire la profondità del canale, cioè il valor medio delle altezze del pelo libero sul fondo del canale. Tale altezza media, che indicherò con H, sarà definita, a norma della (28), dalla seguente espressione:

$$\mathrm{H} = h\int_0^{2\omega} \frac{p+\alpha}{p+\beta}\,d\xi\,;$$

ma essendo, per le (22) e le (23),

$$\frac{p+\alpha}{p+\beta} = 1 + \frac{\alpha-\beta}{p+\beta} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,\dfrac{1}{p-e_2} & \text{se } \varrho > 1\,, \\[2ex] 1 + \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,\dfrac{1}{p-e_3} & \text{se } \varrho < 1\,, \end{cases}$$

sarà

$$(31)\qquad \mathrm{H} = 2\omega h + \begin{cases} \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,h\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{p-e_2}\,, & \text{se } \varrho > 1\,, \\[2ex] \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,h\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{p-e_3}\,, & \text{se } \varrho < 1\,. \end{cases}$$

Supposto $\varrho > 1$, si ha (¹), tenendo presenti le (23),

$$\frac{1}{p-e_2} = \frac{p(\xi-\omega-\omega')-e_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}$$
$$= (k-1)^2\,\frac{24\,\varrho^2\,p(\xi-\omega-\omega') - 2(\varrho-4)\,\varrho}{3(1-\varrho)\,\{(\varrho-4)\,k+\varrho+2\}}\,,$$

dove ω' è definita dalla seconda delle (27); per questa da (31), si ricava

$$(32)\qquad \mathrm{H} = 2\omega h\left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{(\varrho-4)\,(k-1)^2}{(\varrho-4)\,k+\varrho+2}\right\} \quad \text{per } \varrho > 1\,.$$

Supposto $\varrho < 1$, allora essendo (²) per le (23):

$$\frac{1}{p-e_3} = \frac{p(\xi-\omega')-e_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} = (k-1)^2\,\frac{24\,\varrho^2\,p(\xi-\omega') - 2(\varrho-4)\,\varrho}{3(\varrho-1)\,\{(\varrho-4)\,k+\varrho+2\}}\,,$$

da (31) si ricava in definitiva:

$$(33)\qquad \mathrm{H} = 2\omega h\left\{1\;\frac{1}{3}\,\frac{(\varrho-4)\,(k-1)^2}{(\varrho-4)\,k+\varrho+2}\right\} \quad \text{per } \varrho < 1\,.$$

(¹) Cfr., ad es., Halphen, *Fonctions elliptiques* [Paris, 1886, vol. 1, pag. 205].

(²) Cfr. Halphen, loc. cit.