ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Meccanica. — *Estensione della soluzione del Sundman dal caso di corpi ideali, al caso di sferette elastiche omogenee.* Nota di G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Introduzione. — Oggetto della presente Nota.

1. Il Sundman, nella sua Memoria sul problema di tre corpi [1], suppone esplicitamente che si tratti di corpi ideali, cioè tali da essere soggetti, anche nell'urto, *soltanto* alla forza d'attrazione newtoniana.

« Il va sans dire — egli scrive [2] — que lorsque nous parlons de la « continuation du mouvement après un choc, nous supposons qu'il s'agisse « de corps idéaux » ecc.

Data l'importanza dello studio del Sundman, riesce quindi assai interessante di esaminare se il risultato possa estendersi al caso di sferette materiali omogenee e perfettamente elastiche.

Vedremo, nella presente Nota, che la risposta sarà affermativa.

2. Più esattamente immaginiamo tre sfere $S_1 S_2 S_3$, materiali, omogenee, di massa $m_1 m_2 m_3$ e di raggio r; le quali si attirino secondo la legge di Newton.

Supponiamo, inoltre, che esse (per usare il linguaggio degli antichi) siano perfettamente elastiche: cioè tali che, nell'urto, non abbia luogo alcuna perdita di forza viva; ciò che in natura si verifica con approssimazione per l'acciaio, l'avorio ecc.

Indichiamo con $C_1 C_2 C_3$ le traiettorie che i centri di $S_1 S_2 S_3$ descrivono dall'istante iniziale $t=0$ sino a $t=\infty$. Siano $K_1 K_2 K_3$ le traiettorie dei corrispondenti punti ideali del Sundman; cioè le traiettorie di tre punti ideali di massa $m_1 m_2 m_3$, abbandonati in condizioni iniziali identiche a quelle dei centri di $S_1 S_2 S_3$ [3].

Chiamiamo con $X_i Y_i Z_i$ le coordinate del centro della sfera S_i; e con $x_i y_i z_i$ quelle del corrispondente punto ideale di massa m_i, nello stesso istante t.

(1) Karl F. Sundman, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math., tom. 36.

(2) Op. cit., pag. 141.

(3) Supponiamo, ancora, che, nell'istante iniziale, le tre sfere non abbiano alcun moto di rotazione; di maniera che il momento della quantità di moto, e la forza viva del sistema $S_1 S_2 S_3$ siano uguali a quelli del corrispondente sistema ideale del Sundman, $m_1 m_2 m_3$.

Supponiamo, che data una quantità positiva ε, estremamente piccola, si abbia sempre

$$(1)\qquad \left|\sqrt{(X_i - x_i)^2 + (Y_i - y_i)^2 + (Z_i - z_i)^2}\right| < \varepsilon\,; \qquad (i = 1\,,2\,,3)$$

io dirò allora, brevemente, che le traiettorie $C_1\,C_2\,C_3$ si discostano a meno di ε da quelle $K_1\,K_2\,K_3$ dei corrispondenti punti ideali.

Ciò posto, nella presente Nota io dimostrerò che, qualunque siano gli urti, hanno luogo le tre eguaglianze:

$$(2)\qquad \lim_{r=0} C_i = K_i\,; \qquad (i = 1\,,2\,,3)$$

Adoperando allora il linguaggio ordinario, potremo dire che, se le sfere S_i sono di raggio infinitamente piccolo, esse descrivono, non ostante gli urti, le stesse traiettorie dei corrispondenti punti ideali.

La limitazione del Sundman apparirà quindi superflua.

Principî su cui poggia la ricerca.

3. Per maggiore chiarezza, faccio procedere il seguente

Lemma. — Consideriamo le tre sfere di raggio r, di cui sopra abbiamo parlato.

Consideriamo un intervallo finito di tempo:

$$(3)\qquad 0 \leqq t \leqq T\,,$$

e supponiamo di avere costruito nello spazio gli archi $c_{1T}\,c_{2T}\,c_{3T}$, $k_{1T}\,k_{2T}\,k_{3T}$, descritti in questo intervallo dai centri delle tre sfere e dai punti corrispondenti.

Io dico che, essendo T finito, è possibile di assegnare al raggio r delle tre sfere un valore *diverso da zero*, e tale che esse si urtino *soltanto* allorchè la traiettoria del centro dell'una passa *rigorosamente* per il centro dell'altra.

Dimostrazione. — Studiamo le relazioni intercedenti tra k_{1T} e k_{2T}; il lettore intende che ragionamenti analoghi potrebbero ripetersi per le coppie $k_{2T}\,k_{3T}$, $k_{3T}\,k_{1T}$. Trascurando, per ora, il caso (che esamineremo da parte) che gli archi $k_{1T}\,k_{2T}$ abbiano qualche tratto in comune, essi, in generale, si taglieranno in un certo numero di punti P, Q, R ecc.

Di più esisteranno, su k_{1T} e k_{2T}, delle coppie di punti $G_1\,G_2$, $H_1\,H_2$, $L_1\,L_2$ ecc., tali che le distanze $G_1\,G_2 = \lambda_g$, $H_1\,H_2 = \lambda_h$, $L_1\,L_2 = \lambda_l$ ecc. siano *minime* (non nulle), rispetto alle mutue distanze dei punti immediatamente precedenti e seguenti.

Per il nostro scopo dobbiamo considerare come *una sola* tutte quelle coppie $G_1\,G_2$, $N_1\,N_2$ i cui punti presentino distanze uguali, $\lambda_g = \lambda_n$ [1] ecc.

[1] Quindi, se k_{1T} e k_{2T} presentassero nel loro percorso, ad es., due archi circolari concentrici, le infinite coppie di eguale distanza, ivi esistenti, dovrebbero, per il nostro scopo, essere considerate come una coppia sola.

Analogamente dobbiamo considerare P come *un solo* punto comune, anche se in P i due archi presentassero un contatto dell'ordine n. Poste queste convenzioni, data la natura delle traiettorie, ed essendo T finito, è facile il dimostrare che i punti d'intersezione P, Q, R ecc., e le coppie di distanza minima non nulla $G_1 G_2$, $H_1 H_2$, $L_1 L_2$ ecc., sono in numero finito.

Ciò posto, consideriamo la successione:

$$\lambda_g \,,\, \lambda_h \,,\, \lambda_l \,, \ldots ; \tag{4}$$

essa è formata da un numero finito di termini, tutti positivi e diversi da zero: esisterà perciò tra essi un termine λ_i, non nullo, minore o, al più, eguale agli altri.

Se allora immaginiamo di sostituire i corpi ideali del Sundman con sferette omogenee di raggio r, noi saremo certi che non vi sarà alcun urto nei punti di $G_1 G_2$ ecc., purchè si scelga il raggio r in modo da soddisfare all'ineguaglianza

$$2r < \lambda_i \,. \tag{5}$$

Consideriamo ora i punti d'intersezione P, Q, R ecc., e siano $t_{1p}\, t_{2p}$, $t_{1q}\, t_{2q}$, $t_{1r}\, t_{2r}$, i tempi in cui vi passano i due corpi ideali del Sundman, di massa $m_1\, m_2$.

Poniamo:

$$|t_{1p} - t_{2p}| = \tau_p \quad ; \quad |t_{1q} - t_{2q}| = \tau_q \text{ ecc. ecc.} \tag{6}$$

Dividiamo le τ in due classi, ponendo nella prima quelle, tra esse, che sono diverse da zero (ad es.: τ_p, τ_r, τ_s); nella seconda quelle uguali a zero (per es.: $\tau_q\, \tau_u$ ecc. ecc.).

Per ciò che si riferisce alla prima classe:

$$\tau_p \,,\, \tau_r \,,\, \tau_s \,, \ldots \tag{7}$$

risultando essa composta di un numero finito di termini tutti positivi e non nulli ne esisterà uno, per es. τ_z, diverso da zero, minore o, al più, eguale agli altri.

Sostituendo i corpi ideali $m_1\, m_2$ con le nostre sfere $S_1\, S_2$, noi potremo allora evitare gli urti corrispondenti alle intersezioni P, R ecc., purchè diamo loro un raggio sufficientemente piccolo, ma finito.

Per le intersezioni della seconda classe Q, U ecc., avviene il contrario. Qui l'urto ha sempre luogo comunque sia piccolo il raggio r. Ma, per questi punti, la traiettoria del centro della sfera S_1, supposta prolungata, passa rigorosamente per il centro della sfera S_2. Infatti, k_{1T} e k_{2T} s'intersecano in Q, U ecc.; e si ha $t_{1q} = t_{2q}$, $t_{1u} = t_{2u}$, ecc.

Supponiamo, ora, che k_{1T} e k_{2T} abbiano un tratto comune φ. Per gli archi residui $k_{1T} - \varphi$ e $k_{2T} - \varphi$, ripeteremo ciò che è stato detto. Quanto al tratto φ, se esso viene percorso in tempi diversi dai due mobili, ciò non reca alcun danno. In caso contrario, se su φ hanno luogo urti, questi soddisfano certamente alla nostra asserzione, percorrendo i due centri la stessa traiettoria. Il lemma è dunque provato. c. d. d.

TEOREMA FONDAMENTALE.

4. Dimostriamo ora il seguente

Teorema. — Consideriamo gli archi di traiettoria

$$c_{1T}\, c_{2T}\, c_{3T}\ ,\ k_{1T}\, k_{2T}\, k_{3T}$$

descritti nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ dai centri delle nostre sfere $S_1\, S_2\, S_3$, e dai corrispondenti corpi ideali del Sundman. Sia ε una quantità arbitraria. piccola a piacere. Io dico che, se T è finito, è possibile di assegnare alle sfere $S_1\, S_2\, S_3$ un raggio r, *diverso da zero*, e tale che $c_{1T}\, c_{2T}\, c_{3T}$ si discostino da $k_{1T}\, k_{2T}\, k_{3T}$ a meno di ε.

Dico, di più, che, mantenendo fisso T, e facendo tendere r a zero, si ha:

$$\lim_{r=0} \varepsilon = 0\,. \tag{8}$$

Dimostrazione. — Cominciamo intanto dal ricordare che, nell'istante iniziale, le sfere $S_1\, S_2\, S_3$ non hanno, per ipotesi, alcun moto di rotazione. Notiamo, allora, che, essendo per es. S_1 omogenea, le forze d'attrazione agenti sui punti di S_1 si ridurranno ad una risultante unica e passante per il suo centro. Se la S_1 viene ad urtarsi con S_2, e supponiamo la superficie senza attrito, la reazione F, esercitata da S_2 su S_1, sarà perpendicolare al piano tangente comune, condotto per il punto di contatto: la F passerà perciò per i due centri. Le nostre sfere quindi non acquisteranno mai alcun moto di rotazione: e noi non dovremo perciò temere quei fenomeni perturbatori, dovuti a moti rotativi, i quali potrebbero modificare le leggi dell'urto, e immagazzinare una parte dell'energia cinetica del sistema.

Ciò posto, scegliamo r in modo tale che nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ l'urto avvenga *soltanto* in quei punti in cui la traiettoria del centro di una sfera passa *rigorosamente* per il centro dell'altra. Essendo T finito, a norma del precedente lemma, il valore di r risulterà finito e *diverso da zero*.

Sia t_1^* l'istante in cui avviene il primo urto; ad es., tra la sfera S_1 e la sfera S_2. Consideriamo il moto del centro di S_2, rispetto al centro di S_1 prendendo, pel momento, quest'ultimo punto come origine, e servendoci di un piano mobile α, passante per l'origine e per la tangente alla traiettoria relativa del centro di S_2.

Chiamiamo con ϱ il raggio vettore (distanza tra i centri delle due sfere), e con ϑ l'angolo che esso forma con una retta tracciata sul piano mobile α. Sia β l'angolo d'incidenza (contato dalla congiungente i due centri) sotto cui avviene l'urto tra le sfere. Esso sarà uguale all'angolo che, nell'istante t_1^*, il raggio vettore ϱ forma con la tangente alla traiettoria relativa del centro di S_2. Ammettendo quest'ultima una tangente ben determinata, avremo, secondo una formola notissima,

$$(9) \qquad \operatorname{tg}\beta = \left[\frac{\varrho}{\dfrac{d\varrho}{d\vartheta}}\right]_{t=t_1^*} = \left\{\varrho\,\frac{\dfrac{d\vartheta}{dt}}{\dfrac{d\varrho}{dt}}\right\}_{t=t_1^*}.$$

Ma si ha:

$$(10) \qquad \varrho_{t=t_1^*} = 2r.$$

Facciamo tendere a zero il raggio r delle due sfere. Per il nostro lemma, passando la traiettoria di S_2 rigorosamente per il centro di S_1, *l'urto avrà sempre luogo*. Solamente, t_1^* tenderà ad un valore limite t_1; $\dfrac{d\vartheta}{dt}$ si conserverà finita per un noto teorema, mentre $\dfrac{d\varrho}{dt}$ tenderà all'infinito. Avremo quindi

$$(11) \qquad \lim_{r=0}(\operatorname{tg}\beta) = 0.$$

In altre parole, tendendo a zero il raggio delle sfere, $S_1\,S_2$, l'urto nell'istante t_1^*, tende a divenire normale. Ciò posto, tornando a riferirci ad assi fissi, chiamiamo con v_1 e V_1 la velocità del centro di S_1 immediatamente prima e dopo l'urto; con v_2 e V_2 le quantità analoghe per S_2.

Se l'urto fosse esattamente normale, non essendovi, per ipotesi, alcuna perdita di forza viva, noi avremmo:

$$(12) \qquad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)\,v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Ora io chiamo con w la velocità del baricentro del sistema S_1, S_2; ho allora, immediatamente prima e dopo l'urto:

$$(13) \qquad w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2},$$

da cui ricavo:

$$(14) \qquad \frac{V_2}{v_2} = \frac{2w}{v_2} - 1.$$

Facciamo decrescere a zero il raggio r delle sfere, mantenendo fisse le loro masse. La velocità con cui esse si urtano tenderà all'infinito, mentre la velocità w del baricentro del sistema rimarrà finita; ho allora, dalla (14),

$$\lim_{r=0}\left(\frac{V_2}{v_2}\right) = -1; \tag{15}$$

ed analogamente:

$$\lim_{r=0}\left(\frac{V_1}{v_1}\right) = -1. \tag{16}$$

Facendo quindi tendere a zero il raggio r delle sfere, l'urto tende a divenire normale; e la velocità di rimbalzo tende a divenire uguale, a meno del segno, a quella primitiva. Al limite, avremo quindi per l'urto le stesse leggi dei corpi ideali del Sundman. Ciò posto: in tutto l'intervallo compreso fra $t = 0$ e $t = t_1^*$, in cui avviene il primo urto, le traiettorie dei centri di $S_1\,S_2\,S_3$ sono identiche a quelle dei corrispondenti corpi ideali. Ma, come abbiamo visto, è possibile di scegliere r tanto piccolo che, immediatamente dopo l'urto, le condizioni dei centri delle sfere $S_1\,S_2\,S_3$ *siano vicine, quanto ci piace, a quelle dei corpi ideali corrispondenti*. Allora, essendo le coordinate funzioni continue delle condizioni iniziali, in tutto l'intervallo $t_1^* \leqq t \leqq t_2^*$, compreso tra il primo e il secondo urto, le traiettorie dei centri delle tre sfere $S_1\,S_2\,S_3$ saranno non più identiche, *ma prossime, quanto vogliamo*, a quelle dei corrispondenti corpi ideali. Ora, T è finito: quindi nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ non può aver luogo che un numero *finito* di urti. Il nostro teorema risulta perciò provato. c. d. d.

Dimostrazione delle (2). - Tendendo r a zero, le traiettorie $C_1\,C_2\,C_3$ convergono — sebbene non uniformemente — verso $K_1\,K_2\,K_3$.

Conclusione.

5. Indichiamo, come è stato detto in principio, con $C_1\,C_2\,C_3$, $K_1\,K_2\,K_3$ le intere traiettorie descritte da $t = 0$ a $t = \infty$, dai centri delle nostre sfere, e dai corpi ideali corrispondenti. Sia E_i un punto qualsiasi, appartenente alla traiettoria C_i; e sia $\overline{t_i}$ l'istante in cui vi giunge il centro della sfera S_i. Nello stesso istante il corpo ideale m_i giungerà al punto F_i sulla K_i. Facciamo tendere r a zero. Essendo $\overline{t_i}$ finito, per quanto è stato detto, avremo, indicando con $\overline{E_i\,F_i}$ la distanza dei due punti:

$$\lim_{r=0} \overline{E_i\,F_i} = 0 \tag{17}$$

Ma E_i è un punto generico, preso a caso, sulla C_i. Ripetendo il ragionamento per ogni punto al finito, avremo:

$$\lim_{r=0} C_i = K_i . \qquad (i = 1\,,2\,,3) \tag{18}$$

Le (2) sono quindi dimostrate. Domandiamoci, però, se C_i converge verso K_i in modo uniforme. È facile vedere che, in generale, la risposta sarà negativa. In altre parole, a differenza di ciò che avviene per le $c_{i\tau}$, ora è, in *generale*, impossibile trovare un valore di r, *diverso da zero*, per cui le C_i si discostino a meno di ε dalle K_i. Per dimostrarlo, basta osservare che, in questo caso, essendo l'intervallo di tempo infinito, le successioni (4) e (7) sono in generale composte d'infiniti termini, e possono avere per limite inferiore lo zero.

In casi particolari può però aversi la convergenza uniforme. Un esempio importante, in cui questo fatto si verifica, si ha quando le orbite sono periodiche. Infatti, chiamando con Ω il periodo, basta allora studiare il fenomeno nell'intervallo $0 \leqq t \leqq \Omega$. Vale quindi il teorema del n. 4. Enunciando le (18) col linguaggio ordinario, giungiamo al risultato seguente, già annunziato in principio:

« *Le traiettorie descritte da tre sferette perfettamente elastiche, omogenee, di raggio infinitamente piccolo, le quali si attirino secondo la legge di Newton, sono identiche, non ostante gli urti, a quelle dei corrispondenti corpi ideali del Sundman. La limitazione posta dal Sundman sulla natura dei suoi corpi, appare quindi superflua* ».

Matematica. — *Risoluzione geometrica del problema di Moutard sulla costruzione delle equazioni di Laplace ad integrale esplicito.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il problema della costruzione delle equazioni di Laplace, cioè del tipo

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \varrho_1 \, \partial \varrho_2} + a(\varrho_1 , \varrho_2) \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + b(\varrho_1 , \varrho_2) \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} + c(\varrho_1 , \varrho_2)\, x = 0 ,$$

che ammettono un integrale esplicito (cioè per le quali la successione di trasformate di Laplace si chiude dalle due parti) è stato posto e risoluto dal Moutard, in una celebre Memoria, perduta, prima che fosse stampata, nel 1871: una parte di essa, quella relativa alle equazioni ad invarianti uguali, è stata ricomposta e resa nota dal Moutard nel 1878 [1].

Il Darboux, nelle sue classiche « Leçons sur la théorie générale des surfaces », ha risoluto per via analitica il problema di Moutard; con metodo che presumibilmente si avvicina di più a quello tenuto dal Moutard

[1] Journal de l'École polytechnique, XLV cahier, p. 1.