ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Le (2) sono quindi dimostrate. Domandiamoci, però, se C_i converge verso K_i in modo uniforme. È facile vedere che, in generale, la risposta sarà negativa. In altre parole, a differenza di ciò che avviene per le $c_{i\tau}$, ora è, in *generale*, impossibile trovare un valore di r, *diverso da zero*, per cui le C_i si discostino a meno di ε dalle K_i. Per dimostrarlo, basta osservare che, in questo caso, essendo l'intervallo di tempo infinito, le successioni (4) e (7) sono in generale composte d'infiniti termini, e possono avere per limite inferiore lo zero.

In casi particolari può però aversi la convergenza uniforme. Un esempio importante, in cui questo fatto si verifica, si ha quando le orbite sono periodiche. Infatti, chiamando con Ω il periodo, basta allora studiare il fenomeno nell'intervallo $0 \leqq t \leqq \Omega$. Vale quindi il teorema del n. 4. Enunciando le (18) col linguaggio ordinario, giungiamo al risultato seguente, già annunziato in principio:

« *Le traiettorie descritte da tre sferette perfettamente elastiche, omogenee, di raggio infinitamente piccolo, le quali si attirino secondo la legge di Newton, sono identiche, non ostante gli urti, a quelle dei corrispondenti corpi ideali del Sundman. La limitazione posta dal Sundman sulla natura dei suoi corpi, appare quindi superflua* ».

Matematica. — *Risoluzione geometrica del problema di Moutard sulla costruzione delle equazioni di Laplace ad integrale esplicito.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il problema della costruzione delle equazioni di Laplace, cioè del tipo

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \varrho_1 \, \partial \varrho_2} + a(\varrho_1, \varrho_2) \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + b(\varrho_1, \varrho_2) \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} + c(\varrho_1, \varrho_2)\, x = 0,$$

che ammettono un integrale esplicito (cioè per le quali la successione di trasformate di Laplace si chiude dalle due parti) è stato posto e risoluto dal Moutard, in una celebre Memoria, perduta, prima che fosse stampata, nel 1871: una parte di essa, quella relativa alle equazioni ad invarianti uguali, è stata ricomposta e resa nota dal Moutard nel 1878 [1].

Il Darboux, nelle sue classiche « Leçons sur la théorie générale des surfaces », ha risoluto per via analitica il problema di Moutard; con metodo che presumibilmente si avvicina di più a quello tenuto dal Moutard

[1] Journal de l'École polytechnique, XLV cahier, p. 1.

[servendosi cioè della teoria delle trasformate differenziali e integrali, singolari, della (1)] ha raggiunto lo stesso scopo il prof. Nicoletti [1].

Io mi propongo qui di risolvere il problema di Moutard con sole considerazioni geometriche; esse gettano, mi sembra, una luce d'evidenza e di intimo significato nell'eleganza delle formole del Darboux. In particolare mi permetto di rilevare la costruzione delle equazioni ad invarianti uguali fatta col solo sussidio di un bel teorema di Koenigs, del quale colgo l'occasione per dare una dimostrazione di carattere proiettivo.

2. È noto il significato geometrico della (1): se si considerano $n+1$ sue soluzioni indipendenti come coordinate proiettive omogenee di un punto in uno S_n, questo punto descrive, al variare di ϱ_1, ϱ_2, un doppio sistema coniugato rappresentato, sulla superficie luogo Φ, dalle equazioni $\varrho_2 = \text{cost.}$ (curve caratteristiche ϱ_1) e $\varrho_1 = \text{cost.}$ (curve ϱ_2). La congruenza delle tangenti alle curve ϱ_1 (o ϱ_2) di Φ ha (oltre Φ) una seconda superficie focale che rappresenta una delle trasformate di Laplace Φ_1 (o Φ_{-1}) della (1).

Perchè la successione delle trasformate della (1) sia terminata da una parte almeno occorre e basta che sul nostro modello iperspaziale si verifichi una delle circortanze seguenti [2]:

gli spazî osculatorî S_k alle caratteristiche di un sistema nei punti di una caratteristica dell'altro sistema passano per un punto; in tal caso la successione si chiude da una parte dopo k trasformazioni, secondo il caso generale;

le caratteristiche di un sistema sono contenute in spazî S_k, che riescono osculatori ad una curva; la successione si chiude pure dopo k trasformazioni in un senso, secondo il caso di Goursat;

se gli S_k dell'ultimo caso passano per uno spazio fisso S_μ, la successione si chiude dopo $k-\mu$ trasformazioni; si ha il caso misto.

3. Proponiamoci di costruire tutte le successioni di Laplace terminate in tutt'e due i sensi secondo il caso di Goursat.

Siano le caratteristiche di un sistema di Φ immerse negli S_h osculatori ad una curva γ_1, e le caratteristiche dell'altro sistema in S_k osculatori ad una curva γ_2. È chiaro che Φ è il luogo dei punti d'intersezione di un S_h osculatore a γ_1 con un S_k osculatore a γ_2, e che quindi Φ e tutta la successione sta in un S_n ove $n = h + k$. Viceversa: date due curve ad arbitrio in S_n, il luogo del punto d'intersezione di un S_h generico osculatore alla prima e di un S_k osculatore alla seconda è sempre una superficie Φ

[1] Rend. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. VI (1 sem. 1897), pp. 307-314 e pp. 334-341. Per la teoria generale delle trasformazioni della (1) vedasi pure del Nicoletti: *Sulla trasformazione delle equazioni lineari del secondo ordine con due variabili indipendenti* (Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, 1897).

[2] Vedasi la mia Memoria: *Sull'equazione di Laplace* (Rend. Circ. mat. di Palermo, tom. XXXIV, 1912), parte I.

con un doppio sistema coniugato? Per vederlo, basterà dimostrare che le tangenti a due curve segate su due S_h, infinitamente vicini, dagli S_k, sono incidenti a coppie. Ma ciò è chiaro se si pensa che una tangente ad una curva di S_h è segata dallo S_{k+1} congiungente due S_k infinitamente vicini: le due tangenti richieste sono segate dallo S_{k+1} su due S_h infinitamente vicini, cioè stanno nello S_{h+1} loro congiungente. Appartenendo ad un S_{h+1} e ad un S_{k+1} di S_n $(n = h + k)$, stanno nel loro piano d'intersezione: quindi effettivamente s'incontrano. Dunque:

Per costruire la più generale successione di Laplace chiusa dalle due parti secondo il caso di Goursat, basta considerare due curve qualsiansi di S_n: *il luogo del punto d'intersezione di un* S_h *osculatore alla prima e di un* S_k *osculatore all'altra, con la condizione* $h + k = n$, *è una superficie* Φ *della serie. Per ottenere tutte le superficie della successione, basta far variare* h *da* 0 *ad* n (¹).

Nel caso che una o tutt'e due le curve scelte degenerino, la successione si chiude da una o da tutt'e due le parti, presentando il caso misto.

4. Per costruire le successioni più generali chiuse da tutt'e due le parti secondo il caso generale, consideriamo due curve γ_1, γ_2 qualsiansi in S_n, fra loro in posizione generica, e consideriamo inoltre gli S_{h+k+1} congiungenti S_h osculatori alla prima curva, con S_k osculatori alla seconda, e tagliamo poi la configurazione, così ottenuta, di ∞^2 S_ν $(\nu = h + k + 1)$, con un $S_{n-\nu}$. Si ottiene una superficie Φ con un doppio sistema coniugato, la cui successione di Laplace è chiusa da tutt'e due le parti secondo il caso generale. Infatti, se in un punto di γ_1 si considera, oltre allo S_h, lo S_ν osculatore, questo taglia $S_{n-\nu}$ in un punto per il quale vengono a passare gli S_{k+1} osculatori alle curve ϱ_1 di Φ nei punti di una curva ϱ_2. Altrettanto avviene scambiando l'ufficio delle due curve.

5. Interpretiamo analiticamente questi risultati.

Le due curve γ_1, γ_2 del n. prec. siano individuate proiettivamente dalle due equazioni lineari omogenee, d'ordine $n + 1$,

$$(2) \qquad \alpha_{n+1}\, x + \alpha_n\, x^{(1)} + \cdots + \alpha_0\, x^{(n+1)} = 0 \qquad \left(x^{(h)} = \frac{d^h x}{d\varrho_1^h}\right)$$

$$(3) \qquad \beta_{n+1}\, y + \beta_n\, y^{(1)} + \cdots + \beta_0\, y^{(n+1)} = 0 \qquad \left(y^{(k)} = \frac{d^k y}{d\varrho_2^k}\right):$$

(¹) Se le curve che terminano la successione dalle due parti coincidono, la superficie Φ è luogo delle intersezioni degli S_h e degli S_k osculatori ad una stessa curva. In particolare, per $n = 4$, $h = 2$ e $k = 4$; e se la curva è la quartica razionale normale, si ha come superficie Φ del tipo esaminato la più generale proiezione in S_4 della superficie di Veronese già incontrata dal prof. Castelnuovo (Atti Ist. veneto, ser. 7ª, tom. II, 1889) come superficie singolare di un sistema lineare ∞^2 di complessi lineari di rette, e dal prof. Fano come superficie con ∞^3 trasformazioni proiettive in sè (Mem. Acc. di Torino, s. 2ª, tom. XLVI, 1896).

i coefficienti della prima essendo funzioni della sola ϱ_1; quelli della seconda, della sola ϱ_2. S'intende che i punti di γ_1 o di γ_2 hanno per coordinate proiettive omogenee $n+1$ soluzioni indipendenti della (2) o della (3). Lo spazio congiungente un S_h osculatore a γ_1 e un S_k osculatore a γ_2 è individuato dai punti $x, x^{(1)}, \dots, x^{(h)}$, $y, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$. Se si taglia la configurazione di Laplace [1] degli S_{h+k+1} con lo $S_{n-\nu}$ di equazioni $x_1 = 0, \dots, x_\nu = 0$, si ha una superficie Φ, e le coordinate dei suoi punti si estraggono dalla matrice:

$$
(4) \qquad \left\| \begin{matrix}
x_1 & \dots & x_\nu & x_{\nu+1} & \dots & x_{n+1} \\
x_1^{(1)} & \dots & x_\nu^{(1)} & x_{\nu+1}^{(1)} & \dots & x_{n+1}^{(1)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_1^{(h)} & \dots & x_\nu^{(h)} & x_{\nu+1}^{(h)} & \dots & x_{n+1}^{(h)} \\
y_1 & \dots & y_\nu & y_{\nu+1} & \dots & y_{n+1} \\
y_1^{(1)} & \dots & y_\nu^{(1)} & y_{\nu+1}^{(1)} & \dots & y_{n+1}^{(1)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y_1^{(k)} & \dots & y_\nu^{(k)} & y_{\nu+1}^{(k)} & \dots & y_{n+1}^{(k)}
\end{matrix} \right\| \qquad (\nu = h + k + 1)
$$

tenendo fisse le prime ν colonne. *Questi determinanti sono soluzioni della più generale equazione di Laplace la cui successione termina dalle due parti secondo il caso generale. Le equazioni della successione si ottengono dando ad h tutt'i valori da* 0 *ad n* [2].

Analogamente si procederebbe negli altri casi di chiusura.

6. Consideriamo il caso in cui la (1) abbia gli invarianti [3]

$$
\mathrm{H} = \frac{\partial a}{\partial \varrho_1} + ab - c \quad , \quad \mathrm{K} = \frac{\partial b}{\partial \varrho_2} + ab - c
$$

uguali. La caratteristica geometrica di questo fatto è espressa dal teorema di Koenigs, che ora dimostriamo [4]. Sia x un punto generico di Φ: i punti

[1] Cfr. la mia Nota: *Sur les configurations de Laplace* (Compt. rend. Acad. de France, tom. 156, février 1913).

[2] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. II (1889), ch. VI, n. 385.

[3] Darboux, loc. cit., vol. II, ch. II, n. 326; ho adoperato per gli invarianti le lettere maiuscole, invece che le minuscole come nel Darboux, per evitare confusioni con quel che precede e segue.

[4] Darboux, loc. cit., vol. IV, pag. 878. La dimostrazione del Darboux è d'indole metrica; una dimostrazione proiettiva era stata annunziata da Tzitzéica, ma, per quanto so, non è stata pubblicata.

che da esso si ottengono con la trasformazione di Laplace (nel piano tangente in x a Φ) hanno le coordinate

$$x_i^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_1} + b x_i \quad , \quad x_i^1 = \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_2} + a x_i \, .$$

Scegliamo questi tre punti come vertici di un triangolo fondamentale per un sistema di coordinate proiettive, e precisamente (nel piano tangente considerato) sia

$$x^{-1}(1,0,0) \quad ; \quad x(0,1,0) \quad ; \quad x^1(0,0,1) .$$

Segue, da ciò, che le derivate di x_i sono (in x):

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} = \;\; 1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} = \;\; 0 \\[2ex] x_2 = 1 & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} = -\, b & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} = -\, a \\[2ex] x_3 = 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} = \;\; 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} = \;\; 1. \end{array}$$

Una conica che tocchi i lati del triangolo fondamentale nei vertici x^{-1} e x^1 ha un'equazione del tipo $x_1 x_3 - \lambda x_2^2 = 0$.

Vogliamo determinare λ in modo che la conica riesca osculatrice in x^{-1} alla curva ϱ_2 di Φ_{-1} che vi passa. Detta conica deve perciò contenere il punto

$$\mathrm{X} = x^{-1} + \frac{\partial x^{-1}}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x^{-1}}{\partial \varrho_2^2} d\varrho_2^2 ,$$

le cui coordinate si calcolano subito servendosi dei valori trovati per le derivate prime ed eliminando le successive per mezzo della (1) stessa; e si trova:

$$\mathrm{X}_1 = 1 + \cdots \quad ; \quad \mathrm{X}_2 = \mathrm{K}\, d\varrho_2 + \cdots \quad ; \quad \mathrm{X}_3 = \frac{1}{2} \mathrm{K}\, d\varrho_2^2 ;$$

ove i ... indicano termini d'ordine superiore, in $d\varrho_2$, a quelli scritti. L'equazione della conica richiesta è perciò:

$$x_1\, x_3 - \frac{1}{2\mathrm{K}} x_2^2 = 0 .$$

La conica analoga osculatrice in x^1 alla curva ϱ_1 che vi passa (e tangente in x^{-1} alla curva ϱ_2) ha l'equazione

$$x_1\, x_3 - \frac{1}{2\mathrm{H}} x_2^2 = 0 .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una conica osculatrice in x^{-1} alla curva ϱ_2 e in x^1 alla curva ϱ_1, è che gli invarianti della (1) *siano uguali*: $\mathrm{H} = \mathrm{K}$.

Questo è il teorema di Koenigs.

7. Occupiamoci ora della *costruzione di tutte le equazioni ad invarianti uguali con integrale esplicito.*

Osserviamo, subito, che, essendo ad invarianti uguali l'equazione, la successione termina da tutte due le parti della (1) dopo lo stesso numero di trasformazioni e presentando lo stesso caso. Supponiamo sia quello di Goursat. Come s'è detto al n. 3, la superficie Φ che si considera è luogo dei punti d'intersezione degli S_h e degli S_k osculatori a due curve di un S_{h+k}; poichè nel nostro caso $h = k$, Φ va considerata in uno spazio di dimensione pari, $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{2h}$. Bisogna ora sfruttare, per caratterizzare Φ, le due condizioni: che le caratteristiche di Φ sono in S osculatori a due curve γ_1, γ_2, e che esiste la conica di Koenigs in ogni suo piano tangente.

Dalla prima condizione segue che le curve ϱ_2 su Φ_1 appartengono agli S_{h-1} osculatori alla curva γ_1 (su cui varia soltanto ϱ_1), e le curve ϱ_1 di Φ_{-1} appartengono agli S_{h-1} osculatori a γ_2 (su cui varia soltanto ϱ_2). Per sfruttare la seconda condizione, cerchiamo il luogo della conica di Koenigs al variare di x su Φ. Sia M il punto di γ_1 il cui S_h osculatore contiene la curva ϱ_2 passante per x, e il cui S_{h-1} osculatore contiene la curva ϱ_2 (di Φ_1) passante per x^1, ed N il punto analogo su γ_2.

Consideriamo una qualunque ipersuperficie quadrica Q passante per gli S_{h-1} osculatori a γ_1 in tre punti infinitamente vicini $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{M}''$, e tangente alla curva ϱ_2 di Φ_{-1} in x^{-1}. Il piano tangente in x a Φ sega Q in una conica che è osculatrice in x^1 a ϱ_1 (di Φ_1) e tangente in x^{-1} a ϱ_2 (di Φ_{-1}). Per il teorema di Koenigs detta conica, quindi Q, è osculatrice in x^{-1} a ϱ_2.

Facciamo variare x^{-1} su ϱ_2 (di Φ_{-1}): la conica di Koenigs varia mantenendosi tangente alla posizione precedente e osculatrice alla Q in punti della curva ϱ_2 passante per x^1 (giacente tutta su Q). Poichè la conica di Koenigs relativa a x^{-1} sta su Q, vi stanno anche tutte le posizioni successive, quindi pure la curva ϱ_2 per x^{-1}.

Ora facciamo variare la curva ϱ_2 e consideriamone h posizioni infinitamente vicine. Queste h curve ϱ_2 appartengono ad una stessa quadrica, se una ne esiste passante per $h+2$ S_{h-1} osculatori a λ_1 in M e in punti infinitamente vicini e per due S_{h-1} osculatori a γ_2 in N e in punto infinitamente vicino. Poniamo di aver dimostrato l'esistenza di una tal quadrica Q: gli S_{h-1}, in cui si trovano le curve ϱ_1 di Φ_{-1}, incontrano almeno in h punti (infin. vicini, sulle h curve ϱ_2) la Q. Ma due di essi sono contenuti, per costruzione, sulla quadrica Q, quindi vi appartengono tutti. Q contiene dunque tutti gli S_{h-1} osculatori a γ_2; scambiando Φ_{-1} con Φ_1, si vede che Q contiene anche tutti gli S_{h-1} osculatori a γ_1 (poichè ne contiene già $h+2$).

Rimane da vedere se esista una quadrica soddisfacente alle condizioni imposte. Perchè un S_{h-1} appartenga ad una quadrica di $S_n = S_{2h}$, occorre che vi appartengano $\frac{h(h+1)}{2}$ suoi punti; poichè due S_{h-1} osculatori successivi si tagliano in un S_{h-2} che pure deve appartenere alla quadrica, si hanno, per questo, $\frac{h(h-1)}{2}$ condizioni; quindi, ad esprimere che lo S_{h-1} appartiene alla quadrica, occorrono più soltanto h condizioni. Sicchè gli $h+2$ S_{h-1} osculatori successivi a γ_1 impongono $\frac{h(h-1)}{2} + h(h+2)$ condizioni. Analogamente i due S_{h-1} osculatori a γ_2 impongono $\frac{h(h-1)}{2} + 2h$ condizioni. In totale si hanno

$$h(h-1) + h(h+4) = h(2h+3) = \frac{n(n+3)}{2}$$

condizioni, cioè appunto tante quante bastano per individuare una quadrica in S_n (¹). Raccogliendo, abbiamo:

le curve γ_1, γ_2, *insieme con le loro sviluppabili fino a quelle costituite dagli* S_{h-1} *osculatori, stanno sopra una stessa quadrica* Q; c. v. d.

Siccome non ci sono altre condizioni da sfruttare, si è certi che, scegliendo in questo modo γ_1 e γ_2, si ha, come luogo dei punti d'incontro degli S_h osculatori, una superficie Φ ad invarianti uguali, la cui successione di Laplace si chiude dalle due parti. Infatti il piano tangente in un punto x taglia la quadrica Q in una conica che per costruzione riesce osculatrice in x^1 ad una curva ϱ_1, e in x^{-1} ad una curva ϱ_2; quindi deve coincidere con la conica di Koenigs, e perciò l'equazione ha invarianti uguali.

8. Per tradurre analiticamente il resultato, facciamo ancora qualche osservazione relativamente alle curve γ_1, γ_2: quel che si dice per una, vale anche per l'altra. Poichè gli S_{h-1} osculatori alla γ_1 sono contenuti in Q, gli S_{n-1} osculatori a γ_1 nei suoi punti sono gli iperpiani ivi tangenti a Q. Infatti, lo S_h osculatore in un punto è polare dello S_{h-1} osculatore, e così di seguito (si noti che anche questo fatto è essenzialmente legato alla parità dello spazio, chè in uno spazio dispari non sarebbe possibile costruire curve come quelle qui richieste). Rappresentiamo ancora γ_1 con la (2): dev'essere anzitutto $n = 2h$. Inoltre, se vogliamo ottenere enti reali, l'equazione della quadrica Q riferita ad un $(n+1)$-edro autopolare può scriversi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_h - x_{h+1}^2 - x_{h+2}^2 - \cdots - x_{2h+1}^2 = 0 .$$

(¹) Il fatto che questa quadrica contiene S_{h-1} osculatori a curve (γ_1 e γ_2) è possibile solo perchè l'ambiente ha dimensione pari. Vedi per es. Bertini: *Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), cap. 6, n. 18.

È poi notissimo, nella teoria delle equazioni (2), che il passaggio da essa all'aggiunta equivale a sostituire alla curva (che ne è il modello proiettivo) i suoi S_{n-1} osculatori, o, se si vuole, il luogo dei poli di questi S_{n-1} rispetto a Q: ma, nel nostro caso, questo luogo coincide con la curva primitiva; dunque le equazioni (2) e (3) debbono essere d'ordine dispari e autoaggiunte.

Una superficie dello stesso tipo si ottiene partendo dalle curve γ_1, γ_2, considerando i loro $S_{h+\beta}$ osculatori, gli $S_{2\beta}$ d'intersezione di due di essi appartenenti a curve diverse, e infine tagliando con un $S_{2h-2\beta}$ la configurazione ottenuta.

Possiamo quindi concludere col teorema di Darboux [1]:

Si ottengono tutte le equazioni a invarianti uguali che s'integrano col metodo di Laplace, prendendo, nelle espressioni (4), $h = k$, *e come funzioni* x, y *soluzioni particolari di due equazioni d'ordine dispari autoaggiunte; queste soluzioni debbono inoltre esser tali da soddisfare, insieme con tutte le loro derivate fino a quelle d'ordine* $h - 1$, *ad una stessa relazione quadratica.*

Meccanica. — *Sistemi astatici equivalenti a due forze astatiche irriducibili.* Nota II di Matteo Bottasso, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Altre proprietà del complesso degli assi centrali.

8. Il teorema precedente permette già di raffigurarci molto chiaramente il complesso degli assi centrali del sistema dato; esso può però completarsi considerando gli assi centrali passanti per un punto improprio, o per un punto del piano mediano.

Come nel caso generale, si riconosce facilmente (*Astat.*, n. 54 e n. 75) che:

Gli assi centrali paralleli ad un vettore unitario $\mathbf{u}$, *fissato ad arbitrio, formano un cilindro circolare retto, il cui asse passa per il punto centrale ed il cui raggio è* $(\mathrm{mod}\,\sigma\mathbf{u})/f$, *cioè* [*per la* (7)] $p\mathbf{u} \times \mathbf{i}_1$. *Tale raggio è nullo quando* $\mathbf{u}$ *è normale alla retta centrale, ed è massimo quando* $\mathbf{u}$ *è parallelo a questa retta. La sezione del cilindro indicato, di raggio non nullo, col piano mediano, è l'ellisse (bitangente al circolo focale) luogo delle traccie di tutti gli assi centrali che s'appoggiano alla retta* $G\mathbf{u}$.

(1) Darboux, loc. cit., vol. II, ch. VII, n. 388.