ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

È poi notissimo, nella teoria delle equazioni (2), che il passaggio da essa all'aggiunta equivale a sostituire alla curva (che ne è il modello proiettivo) i suoi S_{n-1} osculatori, o, se si vuole, il luogo dei poli di questi S_{n-1} rispetto a Q: ma, nel nostro caso, questo luogo coincide con la curva primitiva; dunque le equazioni (2) e (3) debbono essere d'ordine dispari e autoaggiunte.

Una superficie dello stesso tipo si ottiene partendo dalle curve γ_1, γ_2, considerando i loro $S_{h+\beta}$ osculatori, gli $S_{2\beta}$ d'intersezione di due di essi appartenenti a curve diverse, e infine tagliando con un $S_{2h-2\beta}$ la configurazione ottenuta.

Possiamo quindi concludere col teorema di Darboux [1]:

Si ottengono tutte le equazioni a invarianti uguali che s'integrano col metodo di Laplace, prendendo, nelle espressioni (4), $h=k$, *e come funzioni* x, y *soluzioni particolari di due equazioni d'ordine dispari autoaggiunte; queste soluzioni debbono inoltre esser tali da soddisfare, insieme con tutte le loro derivate fino a quelle d'ordine* $h-1$, *ad una stessa relazione quadratica.*

Meccanica. — *Sistemi astatici equivalenti a due forze astatiche irriducibili.* Nota II di **Matteo Bottasso**, presentata dal Corrisp. **R. Marcolongo.**

Altre proprietà del complesso degli assi centrali.

8. Il teorema precedente permette già di raffigurarci molto chiaramente il complesso degli assi centrali del sistema dato; esso può però completarsi considerando gli assi centrali passanti per un punto improprio, o per un punto del piano mediano.

Come nel caso generale, si riconosce facilmente (*Astat.*, n. 54 e n. 75) che:

Gli assi centrali paralleli ad un vettore unitario $\mathbf{u}$, *fissato ad arbitrio, formano un cilindro circolare retto, il cui asse passa per il punto centrale ed il cui raggio è* $(\mathrm{mod}\, \sigma\mathbf{u})/f$, *cioè* [*per la* (7)] $p\mathbf{u} \times \mathbf{i}_1$. *Tale raggio è nullo quando* $\mathbf{u}$ *è normale alla retta centrale, ed è massimo quando* $\mathbf{u}$ *è parallelo a questa retta. La sezione del cilindro indicato, di raggio non nullo, col piano mediano, è l'ellisse (bitangente al circolo focale) luogo delle traccie di tutti gli assi centrali che s'appoggiano alla retta* $G\mathbf{u}$.

[1] Darboux, loc. cit., vol. II, ch. VII, n. 388.

Basta infatti osservare che tenendo fissa la direzione dell'asse centrale r, cioè il vettore $\mathbf{j}_3$ in (10), e cambiando, in questa, $\mathbf{j}_1$ in un altro qualsiasi vettore unitario $\mathbf{j}'_1$ (normale a $\mathbf{j}_3$), è sempre $G - p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \cdot \mathbf{j}'_1$ il piede della perpendicolare all'asse centrale condotta da G, e quindi è $\pm p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3$ la distanza del punto centrale G da detto asse. c. d. d.

9. Se è d la distanza d'un punto Q del piano mediano, non esterno al circolo focale, dal punto centrale, s'avrà, come nella (15), $Q = G + p\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ quando si abbia

$$p\mathbf{j}_2 = \pm \sqrt{p^2 - d^2}\,\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \wedge (Q - G),$$

come risulta subito moltiplicando vettorialmente per $\mathbf{i}_1$, ed osservando che il quadrato del secondo membro è p^2. Gli assi centrali (paralleli a $\mathbf{j}_3$) corrispondenti a tale vettore $\mathbf{j}_2$ sono normali a questo vettore, e quindi s'appoggiano alla retta per G parallela al vettore $d^2\mathbf{i}_1 \pm \sqrt{p^2 - d^2}\,\mathbf{i}_1 \wedge (Q - G)$, il che, dopo quanto si è visto nei numeri precedenti, permette di concludere il teorema:

Il cono degli assi centrali, con vertice in un punto del piano mediano non esterno al circolo focale, si spezza in due piani passanti per il punto centrale, simmetrici rispetto al piano mediano, e tali che il seno del loro semidiedro è uguale al rapporto della distanza, del punto considerato dal punto centrale, al raggio del circolo focale.

Per un punto del piano mediano, fuori del circolo focale, non vi sono altri assi centrali (reali) oltre alla congiungente del punto stesso col punto centrale.

Il teorema di Minding
per i sistemi riduttibili astaticamente a due forze

10. Dal teorema precedente risulta, in particolare, che *gli assi centrali passanti per un punto del circolo focale formano un unico fascio (doppio), il cui piano è perpendicolare al piano mediano, cioè passa per la retta centrale.*

Inversamente, si ha che:

Gli assi centrali, appartenenti ad un piano passante per la retta centrale, formano due fasci di rette i cui centri sono i punti d'incontro del piano dato con il circolo focale. Ognuno degli assi indicati è il sostegno d'una forza che può sostituire (staticamente), in una configurazione conveniente, tutte le forze del sistema dato.

Infatti, siano: $\mathbf{i}_2$ un vettore unitario perpendicolare alla retta centrale, cioè ad $\mathbf{i}_1$, e parallelo al piano considerato, ed $\mathbf{u}$ un vettore unitario qualsiasi dello stesso piano. Le rette dei due fasci indicati si ottengono allora dal bipunto $(G \pm p\mathbf{i}_2)\mathbf{u}$ facendo variare il vettore $\mathbf{u}$; e poichè la distanza di $(G \pm p\mathbf{i}_1)\mathbf{u}$, dal punto centrale G, è $\pm p\mathbf{u} \times \mathbf{i}_1$ (che è precisamente, per

il n. 8, la distanza da G dei due assi centrali paralleli ad $\mathbf{u}$, e situati nel piano $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$), così tutte le rette indicate appartengono al complesso degli assi centrali. Ad una qualsiasi di queste rette g corrisponde almeno una configurazione del dato sistema, nella quale g è rappresentato dal bipunto r (10). In tale configurazione il vettore $\mathbf{j}_3$ è parallelo al piano considerato $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$; e poichè $G = p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 . \mathbf{j}_1$ è il piede della perpendicolare condotta per il punto centrale G alla retta g, escludendo il caso (già considerato nel n. 5) di $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 = 0$, si ha che il vettore $\mathbf{j}_1$ è anch'esso parallelo al piano $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$: perciò $\mathbf{j}_2$ è normale a questo piano, e la condizione (11) è verificata.
c. d. d.

11. A complemento del teorema precedente (e di quanto s'è visto nel n. 5), si ha la proposizione seguente, che sostituisce, nel caso in esame, il teorema di Minding:

Quando un sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$ *è astaticamente riducibile a due sole forze, la congruenza luogo delle rette, ciascuna delle quali è il sostegno d'una forza (di vettore* $\mathbf{f}$*) che può sostituire staticamente il sistema di forze, in una conveniente configurazione, è formata da tutte (e sole) le rette che incontrano la retta centrale ed il circolo focale del sistema dato.*

Infatti, quando $ss = 0$, cioè è verificata la (11), la forma s (9) (che è allora un bipunto) rappresenta tutte le rette della congruenza indicata; e si vede immediatamente che tutte queste rette incontrano la retta centrale $G\mathbf{i}_1$, poichè si ha identicamente $G\mathbf{i}_1 s = 0$.

Inoltre la (15) mostra che, quando $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \neq 0$, ed è verificata la (11), il vettore $\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ ha modulo unitario; ed il punto $G + p\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ d'incontro di r (od s) col piano mediano $G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ risulta, così, sempre sul circolo focale. Quando è $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 = 0$, già sappiamo (n. 5) che le rette considerate, normali alla retta centrale, appartengono al piano mediano.

Inversamente, per i nn. 5 e 10, tutte le rette che si appoggiano alla retta centrale ed al circolo focale appartengono alla congruenza indicata; ed il teorema è, così, completamente dimostrato.

Quadriche omofocali.

12. Se π è una forma di 3ª specie che individua un piano [1], del quale A è un punto ed $\mathbf{u}$ è un vettore unitario ad esso normale, il *momento astatico del sistema rispetto al piano*, cioè il vettore $\Sigma_i \frac{3\, P_i \pi}{\mathrm{mod}\, \pi} \mathbf{f}_i$ (somma dei vettori delle forze per le rispettive distanze, con un segno, dei punti d'applicazione dal piano), risulta eguale (*Astat.*, n. 96) a $\sigma_A \mathbf{u}$.

[1] C. Burali-Forti, *Corso di geometria analitico-proiettiva,* Torino, G. B. Petrini, 1912, pag. 163, n. 196 *c*.

Se allora si considerano tutti i piani rispetto ai quali il modulo del momento del sistema ha un dato valore positivo m , essi inviluppano una quadrica d'equazione (*Astat.*, n. 99):

$$(16) \qquad f^2(M-G)\times(m^2-\mathrm{K}\sigma\,.\,\sigma)^{-1}(M-G)=1\,,$$

la quale è di rivoluzione intorno alla retta centrale, perchè dalle (8) segue (*A. V.*, pag. 166):

$$(16) \quad \begin{cases} (m^2-\mathrm{K}\sigma\,.\,\sigma)^{-1}= \\ =f^2\left[\dfrac{1}{m^2-p^2f^2}\,\mathrm{H}(\mathbf{i}_1\,,\mathbf{i}_1)+\dfrac{1}{m^2}\,\mathrm{H}(\mathbf{i}_2\,,\mathbf{i}_2)+\dfrac{1}{m^2}\,\mathrm{H}(\mathbf{i}_3\,,\mathbf{i}_3)\right]; \end{cases}$$

da quest'equazione si trae, inoltre, che il quadrato del semiasse di rotazione della quadrica è $\dfrac{m^2}{f^2}-p^2$, ed $\dfrac{m^2}{f^2}$ è il quadrato del parallelo principale. Da tali espressioni risulta, ancora, che le quadriche (16), al variare di m, formano un sistema di quadriche omofocali, le cui linee focali si ottengono ponendo successivamente p^2f^2, e 0 al posto di m^2; esse sono il circolo focale e la retta centrale. I fuochi principali [1] su questa sono i punti doppî dell' involuzione (di Minchin) del n. 2; e non sono, quindi, reali.

13. Un asse centrale arbitrario r (10) è parallelo al vettore $\mathbf{j}_3$ (od $\mathbf{f}$), e passa per il punto $A=G-p\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3\,.\,\mathbf{j}_1$, la cui omografia, per le (4) e (7), è:

$$\sigma_A=pf\,[\mathrm{H}(\mathbf{i}_1\,,\mathbf{j}_1)+\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3\,.\,\mathrm{H}(\mathbf{j}_1\,,\mathbf{j}_3)]\,.$$

D'altra parte, i piani passanti per l'asse centrale r, ossia per $A\mathbf{j}_3$, si ottengono facendo variare φ nell'espressione $A|\mathbf{u}=A|(\cos\varphi\mathbf{j}_1+\operatorname{sen}\varphi\mathbf{j}_2)$. Perciò, fra i piani uscenti da tale retta, quelli il cui quadrato del momento ha un valore dato m^2, corrispondono agli angoli φ soddisfacenti alla relazione $[\sigma_A(\cos\varphi\mathbf{j}_1+\operatorname{sen}\varphi\mathbf{j}_2)]^2=m^2\,[(\cos\varphi)^2+(\operatorname{sen}\varphi)^2]$, cioè all'equazione di secondo grado in $\operatorname{tang}\varphi$:

$$(17) \qquad \begin{aligned}[p^2f^2(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2-m^2]\,(\operatorname{tang}\varphi)^2+2p^2f^2\,\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1\,.\,\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2\operatorname{tang}\varphi+\\ +p^2f^2\,[(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1)^2+(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3)^2]-m^2=0\,,\end{aligned}$$

alle cui radici corrispondono i piani $A|\mathbf{u}$, per la retta r, tangenti alla quadrica (16).

[1] Ved., per es., L. Bianchi, *Lezioni di geometria analitica*, Pisa, Spoerri, 1915, § 213, pag. 531.

Ora, osserviamo che:

1°) Il prodotto delle due radici di questa equazione sarà -1 quando (e solo quando) è nulla la somma dei coefficienti estremi, cioè è

$$p^2 f^2 [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2] - 2m^2 = 0 :$$

ossia, $2m^2 = p^2 f^2$.

2°) Le due radici dell'equazione (17), corrispondente ad un valore m_1 di m, saranno uguali alle inverse, cambiate di segno, delle radici della stessa equazione (17) per $m = m_2$, quando (e solo quando) il primo ed il terzo coefficiente di detta equazione, per $m = m_1$, sono rispettivamente opposti al terzo ed al primo coefficiente della medesima equazione per $m = m_2$, cioè quando è

$$p^2 f^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 - m_i^2 = -p^2 f^2 [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2] + m_j^2 ,$$

ove i, j indica una delle due permutazioni degli indici 1 e 2; ossia, quando si ha $m_1^2 + m_2^2 = p^2 f^2$.

Si ha così, analogamente a quanto si dimostra per il caso generale [1], che:

Considerando, nel sistema di quadriche omofocali (16), *due iperboloidi* (*che diremo associati*) *ad una falda, i cui raggi dei circoli di gola siano eguali ai cateti d'un qualsiasi triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio del circolo focale* (*e quindi tali che il quadrato del semi-asse, non trasverso, di uno, sia eguale al quadrato del raggio del circolo di gola dell'altro*). *il complesso degli assi centrali del sistema dato può riguardarsi come il luogo delle rette d'intersezione di due piani ortogonali, uno tangente all'uno, e l'altro tangente all'altro dei due iperboloidi associati.*

In particolare, per $m_1^2 = m_2^2 = \frac{1}{2} p^2 f^2$, o per l'osservazione 1ª), si ha:

Il complesso degli assi centrali è il luogo delle rette d'intersezione delle coppie di piani ortogonali tangenti all'iperboloide, ad una falda, di rotazione intorno alla retta centrale, il cui circolo di gola è concentrico al circolo focale; ed il suo raggio è eguale a quello del circolo focale moltiplicato per $1/\sqrt{2}$, *e la cui sezione meridiana è un'iperbole equilatera.*

14. La nostra deduzione permette ancora di riconoscere senza difficoltà (come nel caso generale: cfr. *Astat.*, n. 106) se una qualsiasi delle coppie di piani ortogonali, indicate nei teoremi precedenti, è *formata da piani reali*, poichè basta esaminare il discriminante dell'equazione (17).

È chiaro intanto, per la (15), — contrariamente al caso generale — che per un asse centrale, non appartenente alla congruenza di Minding,

[1] Ved., per es., E. J. Routh, *A treatise on analytical statics*, vol. II, Cambridge, 1892, pag. 199; oppure *Astat.*, n. 106.

non passa alcun piano reale tangente al circolo focale, come non passa alcun piano reale tangente agli iperboloidi associati con un loro asse sufficientemente piccolo. Si può invece riconoscere che:

I due piani ortogonali tangenti all'iperboloide ad una falda dianzi indicato [*corrispondente ad* $m^2 = \frac{1}{2} p^2 f^2$ *nella* (17)], *ed uscenti da un qualsiasi asse centrale, sono sempre reali.*

Con ciò si ha una effettiva *costruzione geometrica reale* di tutti gli assi centrali del nostro sistema.

Infatti, il discriminante dell'equazione (17), per $m^2 = \frac{1}{2} p^2 f^2$, è

$$p^4 f^4 [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2 - \tfrac{1}{2}][(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 - \tfrac{1}{2}] - p^4 f^4 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 =$$
$$= p^4 f^4 [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2 - \tfrac{1}{4}];$$

e siccome il massimo valore che può assumere il prodotto $(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2$, per un valore assegnato di $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1$, è $\frac{1}{4}[1 - (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2]$, tale discriminante è nullo solo quando $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1 = 0$, ed $(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 = (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2 = \frac{1}{2}$, ed è negativo in ogni altra ipotesi. Nel caso ora indicato, è facile di riconoscere che l'equazione considerata è identicamente soddisfatta, e corrisponde ad assi centrali che incontrano il piano mediano nel circolo di gola dell'iperboloide sopra considerato.

Dunque, le radici dell'equazione (17), per $m^2 = \frac{1}{2} p^2 f^2$ sono sempre reali; esse sono inoltre distinte e determinate finchè l'asse centrale considerato, $A\mathbf{j}_3$, non è una generatrice dell'iperboloide indicato nell'enunciato ultimo del n. 13, chè allora sono (com'è ovvio) indeterminate.

15. Il complesso degli assi centrali rientra così, per l'ultimo teorema del n. 13, nel complesso (caso particolare del complesso di Battaglini) che i francesi [1] chiamano senz'altro « di Painvin », il quale [2] ha studiato più specialmente il luogo delle rette, per ciascuna delle quali si possono condurre due piani ortogonali tangenti ad un dato *ellissoide*; ed è a tale studio che si riferisce il Darboux (loc. cit., pag. 40). Peraltro, non tutte le proprietà dedotte dal Painvin si possono riportare al complesso degli assi centrali di un sistema astatico in cui, come nel caso qui studiato, comparisce sempre un *iperboloide ad una falda* (*Astat.*, n. 106); tanto più avendo sopratutto riguardo, come fa il Painvin (loc. cit., pag. 97), agli elementi reali. Così non si potrebbe rintracciare nel Painvin una costruzione del complesso che corrisponda a quella da noi esposta.

[1] Ved., per es., A Demoulin, *Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires*, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XX, 1892, pp. 122-132.

[2] Painvin, *Étude d'un complexe du second ordre*, Nouv. Ann. de Mathém. (2), 11, 1872, pp. 49-60, 106-107, 202-210, 289-297, 481-500, 529-539.

Passiamo ancora osservare che dal n. 9 risulta che: *il piano mediano è il luogo dei punti il cui cono delle rette del nostro complesso si spezza in una coppia di piani*; mentre, nel complesso studiato dal Painvin, tale luogo è *una superficie d'onda* (del 4° ordine), i cui punti reali sono tutti al finito.

Direzioni principali.

16. Nel caso che si considera, si possono trovare facilmente le direzioni principali (*A. V.*, I, pag. 35) dell'omografia σ_A del sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$, relativa ad un punto qualsiasi A.

Infatti, dalle (14) e (17) segue, anzitutto, che σ_A trasforma in un vettore nullo ogni vettore normale al piano $AG\mathbf{i}_1$, od alla retta centrale, secondo che A è fuori o sopra questa retta.

Se A è fuori della retta $G\mathbf{i}_1$, e s'indicano con $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ due vettori unitarî-ortogonali paralleli alle direzioni principali non nulle di σ_A; con $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ i corrispondenti vettori unitarî-ortogonali paralleli alle direzioni principali di $K\sigma_A$; e con a, b i relativi parametri principali (*A. V.*, I, pag. 166), è

$$\sigma_A = a\,H(\mathbf{i}', \mathbf{i}) + b\,H(\mathbf{j}', \mathbf{j}).$$

Poichè allora (*A. V.*, I, pag. 166) $R\sigma_A = ab\,H(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, il vettore $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ è parallelo al vettore $\mathbf{j}_2$ del n. 2; quindi $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, normali a $\mathbf{j}_2$, sono paralleli ad una delle coppie di vettori $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ (6), per un determinato valore di θ: e perciò, in virtù delle (3), i vettori $K\sigma_A\mathbf{i} = a\mathbf{i}'$, $K\sigma_A\mathbf{j} = b\mathbf{j}'$ sono paralleli alle rette ortogonali AP, AQ, che vanno a due punti coniugati nell'involuzione della retta centrale, oltrechè alle direzioni principali, non nulle, di σ_A.

Inversamente, se le due rette AP, AQ, passanti per due punti coniugati (3) dell'involuzione della retta centrale, sono ortogonali, segue subito che, per l'omografia $\sigma_A = H(P - A, \mathbf{h}_1) + H(Q - A, \mathbf{h}_2)$, le direzioni di tali rette sono principali. Così, anche per il n. 7, si ha:

Ogni punto A della retta centrale ha ∞^1 terne principali, ciascuna formata delle direzioni della retta centrale e da due direzioni (nulle per σ_A) ortogonali e normali a tale retta.

Un punto qualunque A, fuori della retta centrale, ha come direzione principale (nulla per σ_A) quella della normale al piano del punto e della retta centrale, insieme con le direzioni della coppia (unica, per A fuori del circolo focale, o fra le ∞^1 coppie siffatte, se A è su tale circolo) di rette ortogonali, che vanno a due punti coniugati nell'involuzione (ellittica, di Minchin) della retta centrale.

17. Le direzioni indicate (doppie per la dilatazione $K\sigma_A . \sigma_A$) sono degli elementi astatici del sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$ rispetto al corpo (*Astat.*, pag. 12), ed hanno perciò una importanza fondamentale nelle ricerche di astatica. Esse

sono parallele sia agli assi dell'*ellissoide centrale* di Darboux, sia a quelli dell'*ellissoide di riduzione* di Da Silva (che sono due quadriche indicatrici, con centro in A, rispettivamente delle dilatazioni $K\sigma_A . \sigma_A$ e $\sigma_A^{-1} . K\sigma_A^{-1}$: cfr. *Astat.*, Appendice), sia agli *assi di squilibrio* di Siacci [1]; e permettono di determinare facilmente, per es., gli assi principali di rotazione di Möbius ed ogni altro elemento invariabilmente legato al corpo.

L'omografia σ_A da noi considerata è definita, oltrechè da tali direzioni principali, dalle direzioni doppie della dilatazione $\sigma_A . K\sigma_A$, astatiche rispetto al sistema di forze, e dai parametri principali (*Astat.*, cap. I, § 10) che sono astatici rispetto al corpo ed alle forze; donde la ragione che con essa si possono facilmente ritrovare le proprietà ottenute sulla astatica con procedimenti assai diversi e spesso complicati. Di più essa permette di completare, e vedere sotto nuova luce, molti risultati noti, poichè presenta il vantaggio di riunire tutti gli elementi che si trovano sempre considerati separatamente dai varî autori, a seconda dei loro punti di vista speciali.

Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla derivazione per serie.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Corrisp. O. TEDONE.

Il seguente teorema mi sembra notevole, perchè semplice ed abbastanza generale.

Se $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, per es. non decrescenti, definite in un intervallo* $a \leq x \leq b$, *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie; cioè quasi dappertutto vale la* $u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x)$.

In altre parole:

1°) il gruppo G dei punti, ove non esiste oppure non è finita anche una sola delle $u'(x)$, $u'_n(x)$;

2°) il gruppo dei punti ove $\Sigma u'_n(x)$ non converge;

3°) il gruppo dei punti ove non è $u'(x) = \Sigma u'_n(x)$

sono aggregati di misura nulla.

(1) F. Siacci, *Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile*, Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL, (3°), tom. IV, n. 3, 1882, pag. 7.