# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXIV.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

sono parallele sia agli assi dell'*ellissoide centrale* di Darboux, sia a quelli dell'*ellissoide di riduzione* di Da Silva (che sono due quadriche indicatrici, con centro in $A$, rispettivamente delle dilatazioni $K\sigma_A . \sigma_A$ e $\sigma_A^{-1} . K\sigma_A^{-1}$: cfr. *Astat.*, Appendice), sia agli *assi di equilibrio* di Siacci [1]; e permettono di determinare facilmente, per es., gli assi principali di rotazione di Möbius ed ogni altro elemento invariabilmente legato al corpo.

L'omografia $\sigma_A$ da noi considerata è definita, oltrechè da tali direzioni principali, dalle direzioni doppie della dilatazione $\sigma_A . K\sigma_A$, astatiche rispetto al sistema di forze, e dai parametri principali (*Astat.*, cap. I, § 10) che sono astatici rispetto al corpo ed alle forze; donde la ragione che con essa si possono facilmente ritrovare le proprietà ottenute sulla astatica con procedimenti assai diversi e spesso complicati. Di più essa permette di completare, e vedere sotto nuova luce, molti risultati noti, poichè presenta il vantaggio di riunire tutti gli elementi che si trovano sempre considerati separatamente dai varî autori, a seconda dei loro punti di vista speciali.

## Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

## Matematica. — *Sulla derivazione per serie.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Corrisp. O. Tedone.

Il seguente teorema mi sembra notevole, perchè semplice ed abbastanza generale.

*Se* $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, per es. non decrescenti, definite in un intervallo* $a \leq x \leq b$, *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie; cioè quasi dappertutto vale la* $u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x)$.

In altre parole:

1°) il gruppo G dei punti, ove non esiste oppure non è finita anche una sola delle $u'(x)$, $u'_n(x)$;

2°) il gruppo dei punti ove $\Sigma u'_n(x)$ non converge;

3°) il gruppo dei punti ove non è $u'(x) = \Sigma u'_n(x)$

sono aggregati di misura nulla.

(1) F. Siacci, *Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile*, Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL, (3°), tom. IV, n. 3, 1882, pag. 7.

Ciò è ben noto (per i teoremi generali del Lebesgue circa le funzioni monotòne) per quanto riguarda il primo gruppo G.

Per un teorema di De la Vallée Poussin (¹), è

$$(1)\qquad \begin{cases} u(x) - u(a) = \int_a^x u'(x)\,dx + \mathrm{V}(x) \\ u_n(x) - u_n(a) = \int_a^x u_n'(x)\,dx + \mathrm{V}_n(x)\,, \end{cases}$$

dove le $\mathrm{V}(x)$, $\mathrm{V}_n(x)$ si definiscono nel modo seguente: Costruiamo infiniti sistemi $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(3)}, \ldots$ di intervalli, a due a due senza punti interni comuni, rinchiudenti l'aggregato G. Siano $\delta_1^{(r)}, \delta_2^{(r)}, \delta_3^{(r)}, \ldots$ gli intervalli di $\Sigma^{(r)}$; la somma delle loro lunghezze *tenda a zero* per $r = \infty$. Siano $v_{nk}^{(r)}, v_k^{(r)}$ le variazioni di $u_n$ e di $u$ in uno dei segmentini $\delta_k^{(r)}$, o sua parte, che appartiene all'intervallo $(a, x)$. Poniamo

$$\mathrm{V}^{(r)} = \sum_k v_k^{(r)}\,, \quad \mathrm{V}_n^{(r)} = \sum_k v_{nk}^{(r)}\,.$$

Il teorema citato dice che:

$$\mathrm{V}(x) = \lim_{r=} \mathrm{V}^{(r)} \quad ; \quad \mathrm{V}_n(x) = \lim_{r=\infty} \mathrm{V}_n^{(r)}\,.$$

Evidentemente

$$v_k^{(r)} = \sum_n v_{nk}^{(r)}\,,$$

donde

$$\mathrm{V}^{(r)} = \sum_k v_k^{(r)} = \sum_k \sum_n v_{nk}^{(r)}\,.$$

Essendo le $v_{nk}^{(r)}$ positive, si possono nel terzo membro invertire i simboli di sommatoria, cosicchè

$$(2)\qquad \mathrm{V}^{(r)} = \sum_n \left[ \sum v_{nk}^{(r)} \right] = \sum \mathrm{V}_n^{(r)}\,.$$

Ora noi possiamo scegliere i $\Sigma^{(r)}$ in guisa che ogni $\Sigma^{(r+1)}$ sia interno a $\Sigma^{(r)}$. Con tale scelta, le $\mathrm{V}^{(r)}$, $\mathrm{V}_n^{(r)}$ decresceranno al crescere della $r$, pure essendo positive; e perciò è ultimo membro di (1) ha, per $r = \infty$, un limite, che si può calcolare passando al limite termine a termine. Quindi

$$(3)\qquad \mathrm{V}(x) = \lim_{r=\infty} \mathrm{V}^{(r)} = \lim_{r=\infty} \sum_n \mathrm{V}_n^{(r)} = \sum_n \lim_{r=\infty} \mathrm{V}_n^{(r)} = \sum \mathrm{V}_n(x)\,.$$

(¹) De la Vallée-Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, vol. I, 2ª edizione, 1909, pag. 269.

Ora, poichè $u(x)=\sum_n u_n(x)$, dalle (1) si trae:

$$\int_a^x u'(x)\,dx+\mathrm{V}(x)=\sum_n\int_a^x u'_n(x)\,dx+\sum_n \mathrm{V}_n(x)\,, \tag{4}$$

la quale, per (3), diventa:

$$\int_a^x u'(x)\,dx=\sum_n\int_a^x u'_n(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Essendo le $u'_n(x)$ non negative, e convergendo il secondo membro di (5), si avrà [1]:

$$\sum_n\int_a^x u'_n(x)\,dx=\int_a^x\sum_n u'_n(x)\,dx\,, \tag{6}$$

cosicchè la (5) diventa:

$$\int_a^x u'(x)\,dx=\int_a^x\left[\sum_n u'_n(x)\right]dx\,.$$

Derivando, se ne deduce che, come si doveva dimostrare, è quasi dappertutto

$$u'(x)=\sum_n u'_n(x)\,.$$

Matematica. — *Sopra una equazione integro-differenziale del tipo ellittico*. Nota di LUIGI SINIGALLIA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] B. Levi, *Sopra l'integrazione delle serie*, Rendiconti dell'Istituto lombardo, vol. XXXIX (1906), pp. 775 e segg.