ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Meccanica. — *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente.* Nota I del dott. FRANCESCO SBRANA, presentata dal Corrispondente O. TEDONE.

1. Ci occuperemo, in questa Nota, del problema delle vibrazioni di una corda elastica tesa, attorno alla sua posizione di equilibrio, in un mezzo resistente, supponendo che la resistenza del mezzo si possa rappresentare con un sistema di forze applicate agli elementi della linea, dello stesso ordine di grandezza di questi elementi, e proporzionali alle loro velocità, e che si possa trascurare il peso della corda stessa.

Di questo problema si sanno determinare le soluzioni elementari [1], e da queste, coi noti metodi, si può risalire alla soluzione generale. Il nostro còmpito sarà invece quello di pervenire ad una tale soluzione, servendoci della formula che il metodo delle caratteristiche di Riemann fornisce per l'integrale generale dell'equazione a derivate parziali del problema. Il vantaggio, che fornisce un tal metodo, consiste principalmente nel non richiedere, perchè esso sia applicabile, che le funzioni che compaiono nelle condizioni iniziali siano prima poste sotto forma di espressioni analitiche speciali.

2. Nella posizione di equilibrio la corda sia distesa lungo l'asse x positivo, tra i punti di ascissa $x=0$, $x=L$, sicchè sia L la sua lunghezza in questo stato di equilibrio. Cominceremo a contare il tempo dall'istante iniziale del movimento.

Chiamiamo u, v, w le componenti dello spostamento di un punto della corda, a partire dalla posizione di equilibrio, secondo gli assi x, y, z. E notiamo che, dal punto di vista analitico, la determinazione di u, v, w costituisce uno stesso problema: quello cioè di ottenere una funzione φ di x e t, la quale, per $t>0$ e x compreso tra 0 ed L, sia soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2f\frac{\partial\varphi}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{1}$$

si riduca a 0 per $x=0$, $x=L$ e $t>0$, e assuma valori assegnati, insieme con $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, per $t=0$, e x compreso tra 0 ed L. Soltanto le costanti f e a^2 hanno ordinariamente valori diversi, secondochè φ rappresenta lo spostamento

[1] Ved., per es., Routh, *The advanced part of a Treatise on the Dynamics of a system of a rigid bodies*, ediz. 1908, pag. 438; Bouasse, *Mécanique physique*, 2me edit., pag. 572.

longitudinale u o una delle componenti v, w dello spostamento trasversale di un punto della corda.

Per risolvere questo problema, conviene trasformare la (1) nell'altra:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = U ,$$

ponendo $\varphi = U e^{-ft}$, e $\xi = \frac{f}{a} x$, $\eta = ft$. Si ponga pure $l = \frac{f}{a} L$. E allora, considerando ξ e η come coordinate ortogonali in un piano, il nostro problema si può porre sotto quest'altra forma:

« determinare una funzione U di ξ e η, la quale, in tutto il campo C del piano $\xi\eta$, limitato dalle rette $\xi = 0$ e $\xi = l$, nel quale $\eta > 0$, sia soluzione della (2), si annulli per $\xi = 0$ e $\xi = l$, e soddisfi inoltre alle condizioni:

$$(U)_{\eta=0} = f(\xi) \quad ; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = F(\xi),$$

essendo f e F funzioni assegnate della ξ, per ξ compreso tra 0 ed l ».

3. Sia ora τ una regione qualunque del piano $\xi\eta$, nella quale U è una soluzione regolare della (2), ed s una linea aperta in questo campo, lungo la quale sono assegnati i valori di U e delle derivate prime, mediante tre funzioni continue, delle quali, naturalmente, due sole saranno indipendenti. Se conduciamo, per un punto $0 \equiv (\xi_0, \eta_0)$ di τ, le due caratteristiche dell'equazione (2)

$$\xi - \eta = \xi_0 - \eta_0 \quad ; \quad \xi + \eta = \xi_0 + \eta_0$$

che diremo del 1° e del 2° sistema rispettivamente, indichiamo con 1 e 2 le loro intersezioni colla linea s, e intendiamo che il senso positivo su essa linea sia quello che va dal punto 1 al punto 2, la formula che dà il calore di U in 0, per mezzo dei valori che la U stessa e le sue derivate prime acquistano su s, tra i punti 1 e 2, ottenuta coll'applicazione del metodo delle caratteristiche di Riemann, si scrive:

$$\text{(3)} \quad 2U_0 = U_1 + U_2 + \int_1^2 \left\{ \left(I_0 \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial I_0}{\partial \eta} \right) d\xi + \left(I_0 \frac{\partial U}{\partial \xi} - U \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \right) d\eta \right\},$$

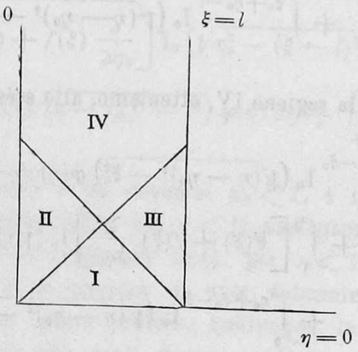
essendo U_0, U_1, U_2 i valori di U nei punti 0, 1, 2, e intendendosi l'integrale esteso alla linea s fra i punnti 1 e 2. Inoltre abbiamo indicato semplicemente con I_0 la funzione

$$I_0(z) = \sum_0^\infty {}_i \frac{z^{2i}}{2^{2i} i! \, i!} \qquad z = \sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - (\xi - \xi_0)^2} \ (^1).$$

(1) Ved., per es., Riemann-Weber, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik.* 2er Bd., ediz. 1912, pag. 306.

4. Cercheremo di risolvere il nostro problema coll'aiuto della formula (3), assumendo per la linea s, che comparisce nella formula (3), il contorno del campo C.

Dividiamo anzitutto il campo stesso nelle regioni I, II, III, IV, come è indicato dalla figura, mediante la caratteristica del 1° sistema uscente dall'origine delle coordinate, e quella del 2° sistema uscente dal punto di ascissa l dell asse ξ. Conduciamo quindi per un punto $0 \equiv (\xi_0, \eta_0)$ del



campo C le due caratteristiche uscenti da esso. Intenderemo come punto 1 l'intersezione della caratteristica del 1° sistema coll'asse ξ positivo se 0 è nelle regioni I o III, coll'asse η positivo se 0 è nelle regioni II o IV; e come punto 2 l'intersezione dell'altra caratteristica coll'asse ξ positivo se 0 è nelle regioni I o II, colla parte positiva della retta $\xi = l$ se 0 è nelle regioni III o IV. Quando il punto 0 cade nella regione I, la formula (3) diventa:

$$(4) \qquad 2U_0 = f(\xi_0 - \eta_0) + f(\xi_0 + \eta_0) + \\ + \int_{\xi_0-\eta_0}^{\xi_0+\eta_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2} \right) d\xi ,$$

e determina quindi, senz'altro, il valore di U in questa regione, per mezzo delle funzioni assegnate f ed F. Se 0 cade nella regione II, ponendo $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \varphi(\eta)$, la formula stessa diventa:

$$(5) \qquad 2U_0 = f(\eta_0 + \xi_0) + \\ + \int_0^{\eta_0+\xi_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2} \right) d\xi - \\ - \int_0^{\eta_0 - \xi_0} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - \xi_0^2} \right) \varphi(\eta)\, d\eta ;$$

e se 0 cade nella regione III, ponendo $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=l} = \psi(\eta)$:

$$(6) \qquad 2U_0 = f(\xi_0 - \eta_0) + \\ + \int_{\xi_0-\eta_0}^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2}\right) d\xi + \\ + \int_0^{\xi_0+\eta_0-l} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - (l - \xi_0)^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta .$$

Se infine 0 è nella regione IV, otteniamo, allo stesso modo, la formula:

$$(7) \qquad 2U_0 = -\int_0^{\eta_0-\xi_0} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - \xi_0^2}\right) \varphi(\eta)\, d\eta + \\ + \int_0^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2}\right) d\xi + \\ + \int_0^{\eta_0+\xi_0-l} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - (l - \xi_0)^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta ,$$

nella quale è ancora $\varphi(\eta) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}$, $\psi(\eta) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=l}$.

La funzione U sarà dunque determinata anche nelle regioni II, III, IV, quando si conoscano i valori di $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$. Il nostro problema sarà perciò risoluto se noi riusciremo a determinare queste ultime funzioni.

Le condizioni alle quali le funzioni $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ devono soddisfare, si ottengono imponendo al valore di U determinato, nel campo C, dal sistema delle formule precedenti, che tenda a zero quando si fà tendere il punto 0 ad un punto del contorno del campo C appartenente all'asse η o alla retta $\xi = l$.

Facendo tendere ξ_0 a 0 nella (5), troviamo allora:

$$(8) \qquad 0 = f(\eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right) d\xi - \\ - \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta ;$$

e facendo tendere ξ_0 ad l nella (6), otteniamo:

$$(9) \qquad 0 = f(l - \eta_0) + \int_{l-\eta_0}^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2}\right) d\xi + \\ + \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \psi(\eta)\, d\eta .$$

Infine, facendo tendere ξ_0 prima a 0, poi ad l, nella (7), abbiamo le due equazioni:

$$(10)\quad \begin{cases} 0 = \int_0^l \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0\left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right) d\xi + \\ \quad + \int_0^{\eta_0 - l} I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta - \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta \\ 0 = \int_0^l \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0\left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2}\right) d\xi - \\ \quad - \int_0^{\eta_0 - l} I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) \varphi(\eta)\, d\eta + \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \psi(\eta)\, d\eta . \end{cases}$$

La (8), nella quale è da ritenersi $\eta_0 < l$, è un'equazione integrale, alla quale deve soddisfare $\varphi(\eta)$, per $\eta < l$; analogamente la (9) è un'equazione integrale cui deve soddisfare $\psi(\eta)$, per $\eta < l$. Nelle (10) è invece da ritenersi $\eta_0 > l$. Se si suppone di aver determinato $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ per $\eta < nl$, essendo n un intero positivo qualunque, le (10) ci dànno subito due equazioni integrali alle quali devono soddisfare $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ rispettivamente, per η compreso tra nl ed $(n+1)l$.

5. Le equazioni integrali, delle quali debbono essere soluzioni $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, sono tutte del tipo

$$(11)\qquad \int_c^{x_0} I_0(x_0 - x)\, \varphi(x)\, dx = \Phi(x_0) - \Phi(c) ,$$

dove c è una costante; e si possono quindi risolvere mediante la formula

$$(11')\qquad \varphi(x_0) = \Phi'(x_0) - \int_c^{x_0} [\Phi(x) - \Phi(c)] \frac{I_1(x_0 - x)}{x_0 - x} dx ,$$

ottenuta dal prof. Tedone [1]. Si ottengono però espressioni più semplici per $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, cercando il limite, per $\xi = 0$ e $\xi = l$, della derivata, rapporto a ξ della funzione U determinata dalle (5), (6), (7). Sarà necessario allora di verificare che i valori di $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, che si ottengono per questa via, soddisfano effettivamente alle equazioni integrali delle quali le funzioni stesse debbono essere soluzioni.

Questo procedimento, del resto, non è che quello stesso col quale il prof. Tedone è riuscito ad ottenere la formula di risoluzione dell'equazione (11).

[1] *Sulla integrazione dell'equazione delle onde smorzate, col metodo delle caratteristiche.* Questi Rendiconti, seduta 31 maggio 1913.

Derivando dunque la (5) rapporto a ξ_0, e facendo quindi tendere ξ_0 a 0 nella formula ottenuta, troviamo subito, quando s' imponga la condizione che $\frac{\partial U_0}{\partial \xi_0}$ tenda a $\varphi(\eta_0)$ per $\xi_0 = 0$,

$$(8') \qquad \varphi(\eta_0) = f'(\eta_0) + \mathrm{F}(\eta_0) - \frac{\eta_0}{2} f(\eta_0) - \\ - \int_0^{\eta_0} \left[\mathrm{F}(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{I}_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi = \\ = f'(\eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[\mathrm{F}'(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \mathrm{I}_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi \,.$$

Derivando la (6) ancora rapporto a ξ_0, e facendo tendere, nella formula ottenuta, ξ_0 ad l, ricaviamo, quando s' imponga la condizione che $\frac{\partial U_0}{\partial \xi_0}$ tenda a $\psi(\eta_0)$ per $\xi_0 = l$,

$$(9') \qquad \psi(\eta_0) = f'(l - \eta_0) - \mathrm{F}(l - \eta_0) - \frac{\eta_0}{2} f(l - \eta_0) - \\ - \int_{l-\eta_0}^{l} \left[\mathrm{F}(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{I}_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2} \right) d\xi = \\ = f(l - \eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[\mathrm{F}'(l - \xi) + f'(l - \xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \mathrm{I}_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi \,.$$

Finalmente, derivando la (7), e facendo quindi tendere ξ_0 prima a 0, poi ad l, otteniamo allo stesso modo:

$$(10') \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\eta_0) &= \psi(\eta_0 - l) - \int_0^l \left[\mathrm{F}(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{I}_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi + \\ &\qquad + l \int_0^{\eta_0 - l} \frac{\mathrm{I}_1 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}} \psi(\eta) \, d\eta \\ \psi(\eta_0) &= \varphi(\eta_0 - l) \\ &\qquad - \int_0^l \left[\mathrm{F}(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{I}_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2} \right) d\xi + \\ &\qquad + l \int_0^{\eta_0 - l} \frac{\mathrm{I}_1 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}} \varphi(\eta) \, d\eta \,. \end{aligned} \right.$$

Le formule (8′) e (9′) dànno i valori $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, per $\eta < l$; e se si suppongono note $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ per $\eta < nl$, le (10′) determinano esse funzioni per η compreso tra nl ed $(n+1)l$.