ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Fisica. — *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Una lamina metallica piana sia sottoposta all'azione di un campo magnetico H, ad essa normale; e si supponga, come nella teoria elettronica della conduzione dei metalli, che la corrente elettrica sia in essi trasportata con meccanismo convettivo dagli ioni positivi e negativi liberamente vaganti in seno al metallo, e dotati delle mobilità che indicheremo rispettivamente con v_1 e v_2. Siano N_1 e N_2 i numeri di ioni positivi e negativi per centimetro cubo; e il valore assoluto della carica elettrica comune per le due specie di ioni; X e Y le componenti della forza elettrica nel senso di due assi x e y, e j_x e j_y le componenti della densità di corrente. Sarà perciò

$$(1)\qquad \begin{cases} j_x = e\left(N_1 \dfrac{d\xi_1}{dt} - N_2 \dfrac{d\xi_2}{dt}\right) \\ j_y = e\left(N_1 \dfrac{d\eta_1}{dt} - N_2 \dfrac{d\eta_2}{dt}\right), \end{cases}$$

dove $\dfrac{d\xi_1}{dt}, \dfrac{d\xi_2}{dt}, \dfrac{d\eta_1}{dt}, \dfrac{d\eta_2}{dt}$ rappresentano le componenti della velocità degli ioni secondo gli assi.

La velocità secondo un asse determinerà una forza elettromagnetica ad esso normale, che si aggiungerà alla forza elettrica dipendente dalla distribuzione dei potenziali sulla lamina. Supposto che la lamina sia mantenuta a temperatura costante, non avremo a considerare altre forze motrici dello ione, all'infuori della forza elettrica e di quella elettromagnetica destata dal moto secondo l'asse normale. Se gli assi x e y e il campo H formano un triedro ortogonale destrorso, avremo perciò

$$\frac{d\xi_1}{dt} = ev_1\left(X - H\frac{d\eta_1}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = ev_1\left(Y + H\frac{d\xi_1}{dt}\right)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -ev_2\left(X - H\frac{d\eta_2}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -ev_2\left(Y + H\frac{d\xi_2}{dt}\right),$$

da cui si ricava, posto $m_1 = Hev_1$, $m_2 = Hev_2$,

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{ev_1}{1+m_1^2}(X - m_1Y) \quad ; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{ev_1}{1+m_1^2}(Y + m_1X)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{ev_2}{1+m_2^2}(X - m_2Y) \quad ; \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{ev_2}{1+m_2^2}(Y + m_2X).$$

Sostituendo nelle (1), dopo aver posto

$$s_1 = \frac{N_1 e^2 v_1}{1 + m_1^2} \quad ; \quad s_2 = \frac{N_2 e^2 v_2}{1 + m_2^2}$$
$$s = s_1 + s_2 \quad ; \quad \varepsilon = m_1 s_1 - m_2 s_2 \, ,$$

si ottiene

$$(2) \quad \begin{cases} j_x = s\mathrm{X} - \varepsilon \mathrm{Y} \\ j_y = \varepsilon \mathrm{X} + s\mathrm{Y} \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{1}{s^2 + \varepsilon^2}\,(s j_x + \varepsilon j_y) \\ \mathrm{Y} = \dfrac{1}{s^2 + \varepsilon^2}\,(-\varepsilon j_x + s j_y), \end{cases}$$

le quali permettono di passare dal campo elettrico alla corrente, e viceversa.

2. La corrente elettrica j dovrà ancora soddisfare alla condizione di continuità

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \, ,$$

il che porta alla condizione

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} = 0 \, ,$$

cioè, come avviene senza l'azione del campo, il potenziale V obbedirà alla condizione di Kirchoff,

$$\Delta^2 V = 0 \, ,$$

Inoltre, essendo stati gli elettrodi supposti di resistenza trascurabile e mantenuti ai potenziali costanti V_1 e V_2, il potenziale conserverà questi valori sulle parti della lamina occupate dagli elettrodi stessi.

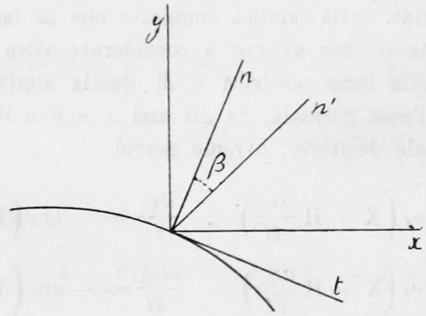

Fig. 1.

Il contorno libero della lamina, se questa è isolata, continuerà ad essere una linea di flusso. Detto perciò α l'angolo che la normale al contorno o a una linea di flusso (fig. 1) fa con l'asse x, sarà, lungo queste linee,

$$j_x \cos\alpha + j_y \operatorname{sen}\alpha = 0 \, .$$

Tenendo presenti le (2), facilmente si riconosce che questa condizione si traduce nella seguente, dove n e t denotano la normale e la tangente alla linea di flusso:

$$s \frac{\partial V}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0; \tag{4}$$

e perciò, indicando con n' una retta formante nel senso destrorso un angolo β con n, tale che

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\varepsilon}{s}$$

si avrà

$$\frac{\partial V}{\partial n'} = 0$$

Adunque: *mentre senza l'azione del campo, su una qualunque linea di flusso, e perciò sul contorno libero, è nulla la derivata del potenziale secondo la normale, per effetto del campo lungo le stesse linee è nulla la derivata di* V *secondo una direzione che forma con la normale un angolo costante in tutta la lamina.*

Quest'angolo si rovescia simmetricamente rispetto alla normale, qualora si inverta il campo, poichè cambia il segno di ε.

Si può perciò concludere che, mentre, senza l'azione del campo, le linee equipotenziali e quelle di flusso formano un sistema ortogonale, per effetto del campo si deformeranno le une, o le altre, o entrambi i fasci di curve, fino a formare un sistema isoclino in tutta la lamina. La rotazione non è trascurabile, poichè nel bismuto l'angolo β può assumere un valore superiore a 10°.

3. La determinazione del potenziale V lungo la lamina, e perciò la previsione del fenomeno di Hall isotermico in una lamina di qualunque forma, è, così, ricondotta alla risoluzione di un particolare problema di Dirichlet: trovare cioè una funzione che soddisfi, entro la lamina, alla condizione

$$\Delta^2 V = 0,$$

che prenda determinati valori V_1 e V_2 sugli elettrodi, e che al contorno libero della lamina verifichi la condizione

$$\frac{\partial V}{\partial n'} = 0.$$

Se ci si limita alla ricerca della variazione del potenziale prodotta dal campo, cioè alla determinazione dell'effetto Hall vero e proprio, basterà porre

$$V = V_0 + v,$$

dove v è la variazione del potenziale primitivo V_0.

La funzione ignota v continuerà a soddisfare all'equazione

$$\Delta^2 v = 0\,,$$

inoltre essa sarà nulla sugli elettrodi, tenuti a potenziale costante; e infine sul contorno libero si avrà, per la (4) (essendo $\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0$),

$$s\frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon\frac{\partial V_0}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} = 0\,.$$

Ma

$$s\frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} = \sqrt{s^2+\varepsilon^2}\,\frac{\partial v}{\partial n'}\,;$$

perciò

$$\frac{\partial v}{\partial n'} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2+\varepsilon^2}}\,\frac{\partial V_0}{\partial t}\,.$$

Indicando con I_0 la corrente senza l'azione del campo, e con c la conducibilità della lamina, si avrà, d'altra parte,

$$I_0 = -c\,\frac{\partial V_0}{\partial t}$$

e, perciò,

$$\frac{\partial v}{\partial n'} = \frac{\varepsilon}{c}\,\frac{I_0}{\sqrt{s^2+\varepsilon^2}}\,.$$

L'ultima relazione ha un significato fisico evidente: la funzione v è identica alla distribuzione dei potenziali che si determinerebbe nella lamina senza campo, qualora, mantenendo gli antichi elettrodi a potenziale zero, si facesse penetrare per il contorno libero un flusso di correnti il cui valore nel senso n' fosse punto per punto proporzionale alla corrente I_0 che si aveva senza campo.

La (4) dà anche

$$s\frac{\partial v}{\partial n'} = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\,.$$

Ma dalle equazioni (2) si deduce facilmente che la corrente j_t nel senso della tangente alla linea di flusso o al contorno è data, mentre agisce il campo, da

$$j_t = -\frac{s^2+\varepsilon^2}{s}\,\frac{\partial V}{\partial t}\,,$$

e perciò

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\varepsilon}{s^2+\varepsilon^2}\,j_t\,, \qquad (5)$$

la quale ci dice che la funzione v è identica col potenziale che si determinerebbe nella lamina, qualora, per mezzo di nuovi elettrodi applicati a tutto il contorno libero, mentre gli antichi son tenuti al potenziale comune zero, si invii nella lamina un flusso di correnti normale al contorno, e proporzionale punto per punto alla corrente locale che si aveva sotto l'azione del campo.

4. Come si è detto, l'effetto del campo si riduce a una rotazione *mutua* di un angolo β delle linee di corrente rispetto a quelle equipotenziali, con la condizione che il contorno sia, come prima, in parte linea di flusso (dove esso è libero) e in parte linea equipotenziale (dove sono gli elettrodi). Ma se la lamina fosse poggiata su elettrodi molto estesi e di elevatissima resistenza specifica, allora il sistema delle linee di corrente resterebbe quello

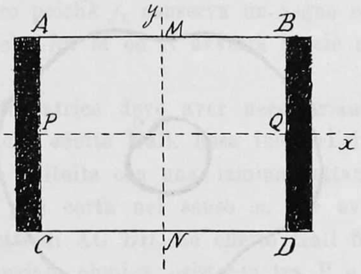

FIG. 2.

di prima, e ruoterebbero solo le linee equipotenziali: il che più non sarebbe impedito dai nuovi elettrodi, i quali consentono che, lungo il contorno della lamina con cui stanno in contatto, il potenziale assuma valori diversi.

Si può anche dire che quando gli elettrodi sono di resistenza nulla, e obbligano parte del contorno a conservare il primitivo potenziale, essi dànno origine a correnti locali con la lamina, cosicchè le linee di corrente totale non son più le primitive. Questo si verificherà anche nel caso semplice di un rettangolo, per esempio di bismuto, provvisto di elettrodi AC BD di rame (fig. 2). Le linee di corrente sotto l'azione del campo non saranno più, come suppone il Drude, parallele all'asse x, cioè quelle esistenti senza campo, poichè le cariche di Hall che si liberano agli orli AB e CD si combineranno in parte attraverso agli elettrodi che mettono gli orli in corto circuito. E perciò la corrente resterà diretta lungo l'asse x solo nell'orlo libero; mentre nell'interno della lamina le linee di corrente saranno deformate. Ciò non avverrebbe se il rettangolo ABCD fosse deposto su elettrodi molto estesi e di altissima resistenza: nel qual caso lungo AC e BD potrebbe crearsi e mantenersi la nuova distribuzione dei potenziali di Hall. Solo allora le linee di corrente resterebbero in tutta la lamina dirette secondo l'asse x, mentre le linee equipotenziali ruoterebbero di un angolo β rispetto alle antiche.

Tornando al caso di una lamina qualunque, nelle circostanze ora indicate che consentono alle linee di corrente di conservare l'assetto primitivo, sia n una linea equipotenziale a campo zero. La (5), integrata fra gli estremi A a B di una di queste, ci dà

$$v_B - v_A = \frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2} \int_A^B j_t \, dn = \frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2} J,$$

dove J è la corrente totale che traversa la lamina. E perciò fra due punti del contorno o di due linee di flusso qualunque, se essi sono inizialmente allo stesso potenziale, si manifesterà un effetto Hall costante, proporzionale alla corrente totale che fluisce tra le due linee considerate. In questo caso, perciò, il problema che discutiamo sarà completamente risoluto.

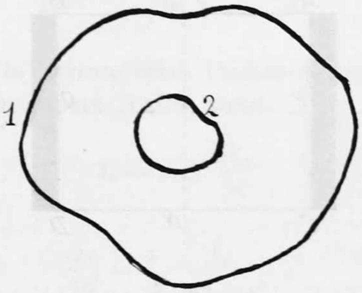

Fig. 3.

4. Possiamo invece considerare un altro caso estremo, facilmente realizzabile: quello di una lamina a connessioni multiple, che abbia sui contorni distinti 1 e 2 due elettrodi a potenziali costanti (fig. 3). Sotto l'azione del campo l'intero contorno conserverà i valori primitivi del potenziale, mentre le linee di corrente potranno deformarsi liberamente, poichè non c'è più una parte del contorno che debba essere, prima e dopo, linea di flusso. Le linee di flusso e quelle di livello faranno, per virtù del campo, un angolo $\frac{\pi}{2} - \beta$; ma, mentre si deformeranno le linee di flusso, resteranno inalterate le equipotenziali, e perciò il potenziale conserverà in tutti i punti il valore di prima. *Mancherà in tale caso l'effetto Hall*; ma la deviazione delle linee di corrente potrà far nascere altri effetti rivelatori dell'azione del campo. Io ho già avuto agio di illustrarne alcuni [1] nel caso di un disco di bismuto che abbia un elettrodo circolare al centro e uno concentrico alla periferia. Le correnti, che sono radiali senza il campo, diventano, per virtù

[1] Corbino, N. Cimento, serie VI, tom. 1, giugno 1911.

di questo, delle spirali logaritmiche, cosicchè il disco si comporta come una lamina magnetica dando origine a quelle singolari azioni elettromagnetiche e meccaniche che potei mettere in evidenza nel lavoro citato.

5. Tolti questi casi estremi, la presenza degli elettrodi arrecherà, nei casi ordinariamente considerati, perturbazioni molto gravi. Così, nel rettangolo della fig. 2 l'esperienza mi ha dimostrato che l'effetto Hall, massimo al centro fra M ed N, declina rapidamente fino a zero, con legge parabolica, avvicinandosi ad AC o a BD. Le correnti che si sovrappongono alla corrente normale hanno un centro di simmetria nel centro O del rettangolo: ma non sono simmetriche rispetto a MN; ne risulta che, lungo MN, esisterà una corrente j_y variabile da punto a punto e perciò la differenza di potenziale tra M ed N verrà diminuita di una quantità proporzionale a $\int_M^N j_y \, dy$ che sarà diversa da zero poichè j_y conserva un segno costante lungo MN e in tutta la lamina; anche fra M ed N avverrà perciò una depressione dell'effetto Hall normale.

Questa causa perturbatrice deve aver necessariamente influito nelle misure finora eseguite dell'effetto Hall. Essa inoltre giustifica il risultato di un'esperienza da me istituita con una lamina rettangolare di bismuto, molto lunga nel senso y e corta nel senso x, che avrebbe dovuto dare, senza l'azione degli elettrodi AC BD, un effetto Hall fra M ed N superiore alla differenza di potenziale ohmica esistente tra P e Q, costituendo così un trasformatore elevatore *statico* di tensioni per correnti continue.

L'esperienza diede invece per risultato una differenza di potenziale fra M ed N sempre minore di quella longitudinale fra P o Q; l'insuccesso va attribuito appunto all'azione degli elettrodi.

Infine le correnti create dalla presenza degli elettrodi, le quali si sovrappongono alla corrente principale determinando la deformazione delle linee di flusso, daranno luogo ad un consumo supplementare di energia per effetto Joule, che si aggiunge al consumo dovuto alla corrente normale. E perciò la resistenza apparente della lamina deve essere aumentata in misura sensibile, sotto l'azione del campo, per la presenza degli elettrodi.

Sono in corso esperienze per constatare l'effetto previsto.