ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota I del Socio VITO VOLTERRA.

1. Il prof. Corbino ha dimostrato [1] che le leggi della propagazione delle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico dipendono da un potenziale V, il quale è legato alle componenti j_x e j_y della densità della corrente dalle relazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} j_x = -\mathrm{K}\left(\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) \\[2ex] j_y = -\mathrm{K}\left(\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right), \end{cases}$$

ove

$$(2)\qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{N}_1 e^2 v_1^2}{1 + \mathrm{H}^2 e^2 v_1^2} + \frac{\mathrm{N}_2 e^2 v_2}{1 + \mathrm{H}^2 e^2 v_2^2}$$

$$(3)\qquad \lambda = \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{H}e\left(\dfrac{\mathrm{N}_1 v_1^2}{1 + \mathrm{H}^2 e^2 v_1^2} - \dfrac{\mathrm{N}_2 v_2^2}{1 + \mathrm{H}^2 e^2 v_2^2}\right)}{\left(\dfrac{\mathrm{N}_1 v_1}{1 + \mathrm{H}^2 e^2 v_1^2} + \dfrac{\mathrm{N}_2 v_2}{1 + \mathrm{H}^2 e^2 v_2^2}\right)},$$

essendo:

H la intensità del campo magnetico normale alla lamina; e il valore assoluto della carica elettrica per gli ioni; v_1 e v_2 le mobilità degli positivi e negativi; N_1 e N_2 il numero degli ioni positivi e negativi per c. c.

Di qui il prof. Corbino deduce che V deve soddisfare alle condizioni seguenti:

1°) in tutta l'area σ occupata dalla lamina,

$$\Delta^2 \mathrm{V} = 0\,;$$

2°) nelle porzioni del contorno libere ed isolate

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} = 0\,,$$

[1] Ved. la Nota del prof. Corbino: *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico*, pubblicata in questo stesso fascicolo.

ove l è una direzione che forma, colla normale esterna n, un angolo costante eguale a β;

3°) lungo degli elettrodi di resistenza trascurabile, V è costante.

2. Cominciamo adesso dallo stabilire alcune formule fondamentali che ci serviranno in tutta la seguente trattazione.

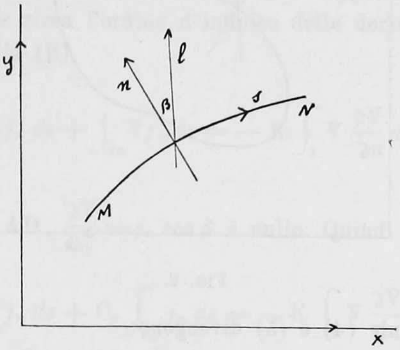

FIG. 1.

Sia s una linea qualunque tracciata nell'interno o al contorno della lamina, n la sua normale diretta, in modo che la coppia di direzioni ortogonali (s, n) sia congruente nel piano colla coppia (x, y).

Dalle formule (1) seguirà che il flusso di elettricità attraverso ds si esprimerà con

$$j_n ds = (j_x \cos nx + j_y \cos ny)\, ds = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}\right) ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds\,,$$

ove l è una direzione che forma con n l'angolo β. Ed il flusso lungo MN, ossia l'intera linea s, sarà

$$(4) \qquad \int_s j_n ds = -\mathrm{K}\int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} ds - \lambda \mathrm{K}(\mathrm{V_N} - \mathrm{V_M}) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} ds\,.$$

Analogamente avremo l'altra formula

$$(5) \qquad \int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\mathrm{K}\int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} ds - \frac{\lambda \mathrm{K}}{2}(\mathrm{V_N^2} - \mathrm{V_M^2}) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} ds\,.$$

Per la validità di queste formule basterà ammettere che, lungo s, V sia finita e le sue derivate prime siano finite o infinite di ordine inferiore ad un numero minore dell'unità [1].

[1] Qui e nel seguito l'ordine di infinito di una funzione in un punto si ha prendendo come infinito fondamentale la inversa della distanza al punto stesso.

Supponiamo che la linea s sia chiusa. Allora, essendo V *monodroma*, perchè ammettiamo che nessuna regione della lamina sia sede di forze elet-

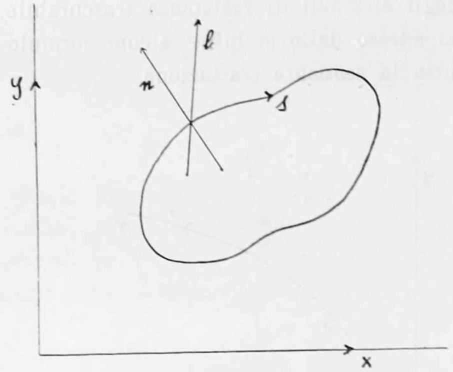

Fig. 2.

tromotrici, le formule (4) e (5) divengono:

$$\text{(A)} \qquad \int_s j_n\, ds = -\,\mathrm{K} \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds = \frac{-\,\mathrm{K}}{\cos\beta} \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds$$

$$\text{(B)} \qquad \int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\,\mathrm{K} \int_s \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds = \frac{-\,\mathrm{K}}{\cos\beta} \int_s \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds\,.$$

3. Ciò premesso, supponiamo che la corrente entri lungo la porzione AB del contorno da un elettrodo di resistenza trascurabile, ed esca dalla porzione CD del contorno la quale costituisca pure un elettrodo di resistenza trascurabile, mentre le porzioni del contorno BC e AD siano libere ed isolate.

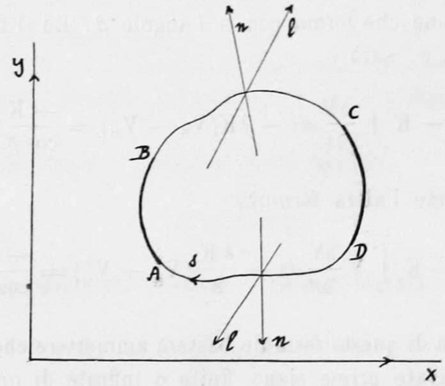

Fig. 3.

Avremo lungo AB e CD, respettivamente,

$$\mathrm{V} = \mathrm{C}_1\ , \quad \mathrm{V} = \mathrm{C}_2\,,$$

ove C_1 e C_2 sono costanti; e lungo BC e AD,

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0 .$$

Nell'interno dell'area σ occupata dalla lamina, V sarà regolare ed armonica.

Ora. se chiamiamo s l'intero contorno, e supponiamo soddisfatta la condizione precedente circa l'ordine d'infinito delle derivate di V lungo s, avremo, in virtù della (B),

$$\int_{AB} V j_n \, ds + \int_{CD} V j_n \, ds = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds .$$

giacchè, sopra BC e AD, $\frac{\partial V}{\partial l} = j_n \cos\beta$ è nullo. Quindi

$$C_1 \int_{AB} j_n \, ds + C_2 \int_{CD} j_n \, ds = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds .$$

Chiamando J la intensità totale della corrente che percorre la lamina, sarà

$$J = \int_{CD} j_n \, ds = - \int_{AB} j_n \, ds ,$$

quindi

$$(C_2 - C_1) J = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds ,$$

e, per un noto teorema sulle funzioni armoniche,

$$(C_1 - C_2) J = K \int_\sigma \Delta V d\sigma .$$

Da questa relazione segue che, se $C_1 = C_2 = 0$, V deve essere nulla in tutti i punti di σ, e, per conseguenza, che a dati valori di C_1 e C_2 non può corrispondere che una unica soluzione per V. Abbiamo dunque il teorema:

Noti i valori costanti del potenziale lungo gli elettrodi AB *e* CD, *la distribuzione delle correnti nella lamina è completamente determinata.*

4. Il precedente teorema si estende facilmente. Sia σ un'area nel cui interno la funzione V armonica è regolare, ed s ne sia il contorno. Come conseguenza delle (B) avremo (se, al contorno, V è finita e le sue derivate sono finite o infinite di ordini inferiori ad un numero minore di 1)

$$\int_s V \frac{\partial V}{\partial l} ds = \cos\beta \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds = \cos\beta \int_\sigma \Delta V d\sigma .$$

Quindi, se in certe parti del contorno V è nulla, e nelle rimanenti è nullo il $\frac{\partial V}{\partial l}$, sarà V nulla entro σ: e perciò, se V è nota in certe parti

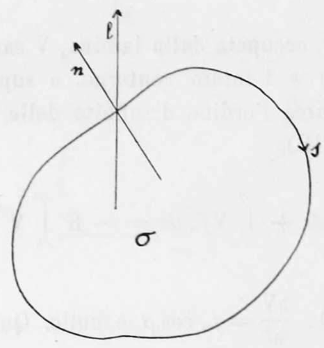

Fig. 4.

del contorno, e nelle rimanenti è noto il $\frac{\partial V}{\partial l}$, V sarà determinata entro σ. Se lungo tutto il contorno è noto solo il $\frac{\partial V}{\partial l}$, V sarà determinata a meno di una costante. La (A) ci dà la condizione a cui deve soddisfare il $\frac{\partial V}{\partial l}$:

$$\text{(A')} \qquad \int_s \frac{\partial V}{\partial l}\, ds = 0\,.$$

5. Supponiamo, ora, che la corrente entri ad esca dalla lamina attraverso due elettrodi puntiformi A e B. Riprendiamo la formula (A), e supponiamo, dapprima, che la linea s sia la linea s_a che circonda il punto A.

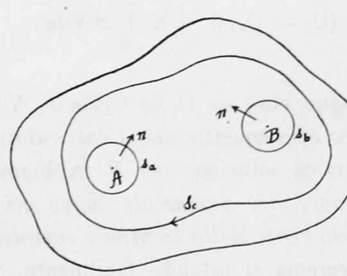

Fig. 5.

Chiamando J l'intensità della corrente, e supponendo n esterna allo spazio racchiuso da s_a, avremo

$$J = \int_{s_a} j_n\, ds_a = -\,K \int_{s_a} \frac{\partial V}{\partial n}\, ds_a\,;$$

mentre, se chiamiamo s_b una linea che circonda il punto B, e n è la normale esterna allo spazio racchiuso da s_b, avremo

$$-\mathrm{J}=\int_{s_b} j_n\, ds_a = -\mathrm{K}\int_{s_b}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds_b\,.$$

Prendendo invece una linea s_c che abbia nell'interno A e B o escluda ambedue questi punti, avremo

$$0=\int_{s_c} j_n\, ds_c = -\mathrm{K}\int_{s_c}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds_c\,.$$

Dunque, nella suddetta ipotesi, noi dovremo porre

$$\mathrm{V}=\frac{\mathrm{J}}{2\pi\mathrm{K}}(\log r_{\mathrm{B}}-\log r_{\mathrm{A}})+\mathrm{W}\,, \tag{6}$$

essendo W armonica regolare, e r_{A} ed r_{B} essendo le distanze del punto generico $x\,,y$ da A e da B, e dovremo porre al contorno dell'area σ la condizione

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}=0, \tag{7}$$

ossia

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial l}=\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{\mathrm{J}}{2\pi\mathrm{K}}(\log r_{\mathrm{A}}-\log r_{\mathrm{B}})\right]. \tag{7'}$$

Ne segue che il problema della distribuzione delle correnti è ricondotto alla determinazione delle funzione armonica regolare W, di cui al contorno si conoscono i valori di $\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial l}$ dati dalla (7'). È facile il riconoscere che la condizione (A') del § 4 è soddisfatta. W resulterà determinata a meno di una costante arbitraria additiva, la quale evidentemente non ha influenza sulla legge della distribuzione delle correnti.

6. Supponiamo invece che la corrente entri da un elettrodo puntiforme A ed esca da un elettrodo BC posto al contorno e di resistenza trascurabile.

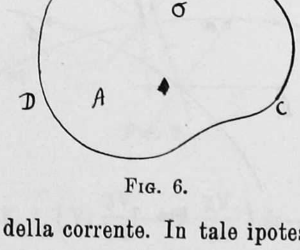

Fig. 6.

Sia J la intensità della corrente. In tale ipotesi si riconosce facilmente, con un procedimento analogo a quello tenuto nel paragrafo precedente, che si deve porre

$$\mathrm{V}=-\frac{\mathrm{J}}{2\pi\mathrm{K}}\log r_{\mathrm{A}}+\mathrm{W}\,,$$

ove W è una funzione armonica regolare nell' interno di σ. Lungo la porzione libera ed isolata BCD del contorno, si dovrà avere

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{J}{2\pi K}\log r_A\right],$$

e, lungo BC,

$$W = C + \frac{J}{2\pi K}\log r_A,$$

ove C è il valore costante che deve assumere V lungo l'elettrodo BC. Quindi, se la funzione W è finita, e le sue derivate lungo s sono finite o infinite di ordine inferiore ad un numero minore di 1, essa sarà determinata entro σ (cfr. § 4), e perciò sarà determinata la legge della distribuzione delle correnti.

7. Riterremo, come si suol fare ordinariamente, che, se da un elettrodo esce una corrente di intensità J, ciò sia equivalente a dire che vi entra una corrente di intensità $-J$. Se dunque abbiamo un elettrodo puntiforme da cui entra la corrente I (qualunque sia il suo segno), nell' intorno di esso il potenziale sarà

$$V = -\frac{I}{2\pi K}\log r + W,$$

ove r è la distanza del punto generico x, y dall'elettrodo e W è una funzione armonica regolare nell' intorno del punto. La parte del potenziale

$$-\frac{I}{2\pi K}\log r = \frac{I}{2\pi K}\log\frac{1}{r}$$

si dirà il *potenziale dell'elettrodo* e sarà il potenziale logaritmico di un punto di massa $\frac{I}{2\pi K}$.

8. Stabiliamo adesso alcune altre formule fondamentali, da aggiungersi a quelle trovate nel § 2.

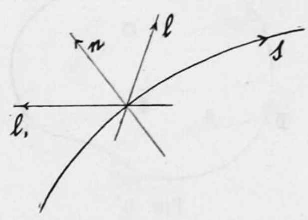

Fig. 7.

Immaginiamo di invertire il senso del campo magnetico, ossia cambiamo H in $-H$. Per distinguere i due casi, diremo che, nel primo, il campo magnetico è *diretto*, e nel secondo il campo magnetico è *invertito*.

Dalle formule (2) e (3) segue che K rimane inalterato, mentre λ cambia segno, ossia cambia segno l'angolo β, e, per conseguenza, la direzione l si cangia nella direzione simmetrica rispetto alla normale n, che chiameremo l_1. Se diamo un indice 1 a tutti gli elementi corrispondenti a questo caso, dovremo scrivere le formule

$$j_{1,x} = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y}\right)$$

$$j_{1,y} = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x}\right),$$

ed avremo

$$\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1} = 0$$

lungo le porzioni del contorno libere ed isolate.

Sia ora una linea qualunque $s = \mathrm{MN}$ interna o al contorno di σ, come abbiamo considerato nel § 2. Sarà

$$\mathrm{V}_1 j_n - \mathrm{V} j_{1n} = \mathrm{V}_1 (j_x \cos nx + j_y \cos ny) - \mathrm{V}(j_{1x} \cos nx + j_{1y} \cos ny) =$$

$$= -\mathrm{K}\left[\mathrm{V}_1\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}\right) - \mathrm{V}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial s}\right)\right] =$$

$$= -\mathrm{K}\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) - \lambda \mathrm{K} \frac{d(\mathrm{V}\mathrm{V}_1)}{ds} = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1}\right)$$

e, integrando a tutta la linea s,

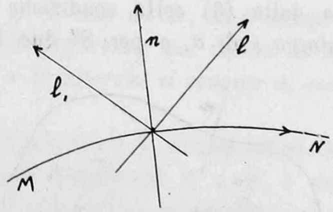

Fig. 8.

$$\int_s (\mathrm{V}_1 j_n - \mathrm{V} j_{1n})\, ds = -\mathrm{K}\int_s \left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) ds - \lambda \mathrm{K}[(\mathrm{V}\mathrm{V}_1)_{\mathrm{N}} - (\mathrm{V}\mathrm{V}_1)_{\mathrm{M}}] =$$

$$= \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1}\right) ds.$$

Se la linea s sarà chiusa, resulterà

$$\text{(C)} \qquad \int_s (V_1 j_n - V j_{1n})\, ds = -K \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) ds =$$

$$= \frac{-K}{\cos\beta} \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} \right) ds\,.$$

È questa appunto una delle formule che conveniva stabilire.

Essa è suscettibile di estensione. Infatti, denotiamo con S non già una sola linea chiusa ma un insieme di linee chiuse le quali formino il contorno di un campo σ' interno a σ. Siccome per ciascuna linea chiusa vale la formula precedente, così essa varrà anche sostituendo ad s l'insieme S; e se, entro l'area σ', V e V_1 saranno regolari, si avrà prendendo n esterna al campo σ'

$$\text{(D)} \qquad \int_S (V_1 j_n - V j_{1n})\, dS = \frac{-K}{\cos\beta} \int_S \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l} \right) dS = 0,$$

giacchè, per il lemma di Green, si ha

$$\int_S \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) dS = 0\,.$$

Supponiamo che S sia formato dall'insieme di linee chiuse S′ e dall'insieme di linee chiuse S″; allora la formula (D) si potrà ancora scrivere

$$\text{(D}'\text{)} \qquad \frac{1}{\cos\beta} \int_{S'} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} \right) dS' + \int_{S''} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) dS'' = 0\,.$$

Le formule (D) e (D′), che abbiamo trovato, costituiscono delle estensioni del lemma di Green.

9. Passiamo ad alcune applicazioni delle formule precedenti.

Prendiamo V data dalla (6) colla condizione (7), e supponiamo di prendere per S′ il contorno s di σ, e per S″ due cerchi s_a e s_b aventi i

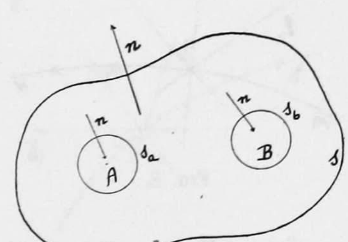

Fig. 9.

centri in A e B. Supponiamo V_1 regolare entro σ. L'area σ'' si ottiene togliendo da σ le aree incluse entro s_a e s_b; quindi sarà limitata da s,

s_a e s_b. In σ'', V e V_1 sono regolari: onde, applicando la (D′), tenendo conto che, su s, $\frac{\partial V}{\partial l} = 0$, resulterà

$$\frac{-1}{\cos\beta}\int_s V \frac{\partial V_1}{\partial l_1}\, ds + \int_{s_a}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_a + \\ + \int_{s_b}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_b = 0\,.$$

Ma, facendo impiccolire indefinitamente i cerchi s_a e s_b, si vede che

$$\lim \int_{s_a}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_a = \frac{J}{K} V_{1,A}$$

$$\lim \int_{s_b}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_b = -\frac{J}{K} V_{1,B}\,,$$

ove $V_{1,A}$ e $V_{1,B}$ denotano i valori di V_1 nei punti A e B; quindi

$$V_{1,A} - V_{1,B} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_s V \frac{\partial V_1}{\partial l_1}\, ds\,.$$

Da questa formula si deduce la proposizione seguente:

Se si conosce la distribuzione delle correnti in una lamina, quando la corrente entra da A *ed esce da* B, *ed il campo magnetico è diretto, si potrà determinare la differenza dei valori di una funzione armonica regolare nei punti* A *e* B *allorchè si conosce al contorno la sua derivata nella direzione* l_1.

Evidentemente sussiste anche l'altra proposizione:

Se si conosce la distribuzione delle correnti in una lamina, quando la corrente entra da A *ed esce da* B, *ed il campo magnetico è invertito, si potrà determinare la differenza dei valori di una funzione armonica regolare nei punti* A *e* B *allorchè si conosce al contorno la sua derivata nella direzione* l.

In altri termini, il potenziale V, corrispondente ad un *campo magnetico diretto* e ai due elettrodi puntiformi A e B, è una *funzione analoga a quella di Green*, per il caso in cui si conoscono al contorno *i valori della derivata di una funzione armonica regolare nella direzione* l_1; mentre il potenziale corrispondente ad un *campo magnetico invertito* e ai due elettrodi puntiformi A e B, è una *funzione analoga a quella di Green*, per il caso in cui si conoscono al contorno i *valori delle derivate di una funzione armonica regolare nella direzione* l.

10. Ritorniamo al caso del § 6 e supponiamo che sia $C = 0$. Sia V_1 una funzione armonica regolare entro σ. Prendiamo per S′ il contorno s

della lamina e per S″ una circonferenza s_a avente il centro in A. Applicando la formula (D′) resulterà

$$\frac{1}{\cos\beta}\int_{BDC} V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} ds - \frac{1}{\cos\beta}\int_{BC} V_1 \frac{\partial V}{\partial l} ds - \int_{s_a}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_a = 0$$

e facendo impiccolire indefinitamente il cerchio s_a

$$V_{1A} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_{BDC} V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} ds - \frac{K}{J\cos\beta}\int_{BC} V_1 \frac{\partial V}{\partial l} ds .$$

Dunque, *se si conosce la distribuzione delle correnti quando la corrente entra da* A *e esce dall'elettrodo* BC *ed il campo magnetico è diretto si potrà determinare il valore in* A *di una funzione armonica regolare allorchè se ne conosce il valore lungo* BC *e si conosce lungo* BDC *il valore della derivata nella direzione* l_1.

L'analoga proposizione si ha quando il campo magnetico è invertito.

11. Prendiamo ora V data dalle (6) colla condizione (7), e V dato da

$$V_1 = \frac{J_1}{2\pi K}(\log r_{B_1} - \log r_{A_1}) + W_1 ,$$

ove W_1 è una funzione armonica regolare entro σ, A_1 e B_1 sono due nuovi punti scelti in questo campo, e si ha

$$\frac{\partial V_1}{\partial l_1} = 0$$

lungo il contorno s di σ. Supponiamo che S′ sia il contorno s, e S″ l'in-

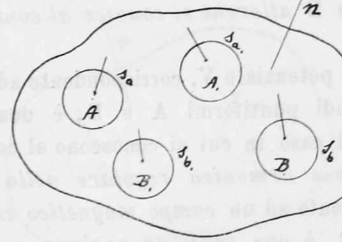

Fig. 10.

sieme dei quattro cerchi $s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1}$ aventi respettivamente i centri in A, B A_1 e B_1.

L'area σ'' si otterrà togliendo da σ le aree racchiuse entro i quattro cerchi. In σ', V e V_1 sono regolari; onde, applicando la (D') e tenendo conto che, su s, $\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V_1}{\partial l_1} = 0$, resulterà

$$\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a + \int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b$$

$$+\int_{s_{a_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{a_1} + \int_{s_{b_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{b_1} = 0 .$$

Ora, facendo impiccolire indefinitamente i quattro cerchi, si ha facilmente

$$\lim \int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a = +\frac{J}{K}V_{1A}$$

$$\lim \int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b = -\frac{J}{K}V_{1B}$$

$$\lim \int_{s_{a_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{a_1} = -\frac{J_1}{K}V_{A_1}$$

$$\lim \int_{s_{b_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{b_2} = +\frac{J_1}{K}V_{B_1} ,$$

quindi

$$J(V_{1B} - V_{1A}) = J_1(V_{B_1} - V_{A_1}) ;$$

e, se le intensità J e J_1 delle correnti sono eguali,

$$V_{1B} - V_{1A} = V_{B_1} - V_{A_1} .$$

Da cui segue la seguente legge di reciprocità:

Se in una lamina conduttrice si fa passare una corrente di intensità J *sotto l'azione di un certo campo magnetico, e in due punti* A_1 *e* B_1 *si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti* A *e* B *quando si faccia entrare da* A_1 *e escire da* B_1 *la stessa corrente d'intensità* J *e si inverta il campo magnetico.*

Ho dato nel 1882 una legge di reciprocità che è un caso particolare della precedente, giacchè corrisponde al caso di correnti elettriche senza l'azione del campo magnetico. Debbo osservare, peraltro, che allora non era posta la condizione di omogeneità pel conduttore [1].

[1] *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque.* Nuovo Cimento, ser. III, vol. XI, anno 1882.

12. Supponiamo che al contorno della lamina esistano gli elettrodi A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, ... di resistenza trascurabile e le altre parti siano libere ed isolate. Supponiamo inoltre che non esista alcun elettrodo interno. Siano $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$, $J^{(4)}$, ... le intensità delle correnti che entrano da questi elettrodi, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, $C^{(4)}$, ... i valori del potenziale V sopra di

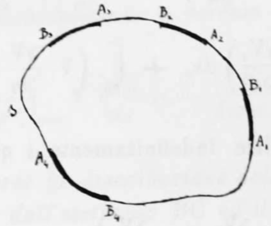

Fig. 11.

essi quando il campo magnetico è diretto. Siano poi $J_1^{(1)}$, $J_1^{(2)}$, $J_1^{(3)}$, $J_1^{(4)}$, ...; $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_1^{(4)}$, ...; V_1, le corrispondenti quantità quando il campo magnetico è invertito. Avremo evidentemente

$$\Sigma_h J^{(h)} = \Sigma_h J_1^{(h)} = 0$$

come del resto resulta dalla formula (A).

Applichiamo ora la formula (D) prendendo per S il contorno s della lamina. Avremo

$$0 = \Sigma_h \int_{A_h B_h} (V_1 j_n - V j_{1,n})\, ds = \Sigma_h (C^{(h)} J_1^{(h)} - C_1^{(h)} J^{(h)})$$

e quindi

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)} .$$

Se le $J^{(h)}$ sono tutte nulle escluse $J^{(1)}$ e $J^{(2)}$, e le $J_1^{(h)}$ sono pure tutte nulle escluse $J_1^{(3)}$ e $J_1^{(4)}$, avremo

$$J^{(1)} = - J^{(2)} = I$$

$$J_1^{(3)} = - J^{(4)} = I_1$$

onde

$$(C_1^{(1)} - C_1^{(2)})\, I = (C^{(3)} - C^{(4)})\, I_1$$

e se $I = I_1$,

$$C_1^{(1)} - C_1^{(2)} = C^{(3)} - C^{(4)} .$$

Queste ultime formule costituiscono dei nuovi teoremi di reciprocità di facile interpretazione (cfr. coi resultati del § 28).

13. Si può immaginare finalmente che nel caso del campo magnetico diretto, oltre gli elettrodi al contorno A_1B_1, A_2B_2, ... si abbiano degli elet-

trodi puntiformi interni $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, \ldots$ da cui entrino delle correnti di intensità $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, \ldots$ e nel caso del campo magnetico invertito, in luogo dei precedenti, altri elettrodi puntiformi interni $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, M_1^{(3)}, \ldots$ da cui entrino delle correnti di intensità $I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, I_1^{(3)}, \ldots$ Sarà allora

$$\Sigma_h J^{(h)} + \Sigma_k I^{(k)} = \Sigma_h J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} I^{(k_1)} = 0$$

e

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} + \Sigma_k V_1^{(k)} I^{(k)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} V^{(k_1)} I_1^{(k_1)},$$

ove $V_1^{(k)}$ denotano i valori del potenziale V_1 nei punti $M^{(k)}$ e $V^{(k_1)}$ i valori del potenziale V nei punti $M_1^{(k_1)}$.

14. Riprendiamo le formule (1), e denotiamo con V' la funzione coniugata delle V (¹), tale cioè che

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V'}{\partial x};$$

allora le (1) potranno scriversi

$$(1') \qquad \begin{cases} j_x = -K \dfrac{\partial(V + \lambda V')}{\partial x} \\[2ex] j_y = -K \dfrac{\partial(V + \lambda V')}{\partial y} \end{cases}$$

onde, posto $V + \lambda V' = U$, avremo

$$(1'') \qquad j_x = -K \frac{\partial U}{\partial x}, \quad j_y = -K \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Lungo le porzioni del contorno libere ed isolate sarà

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0;$$

e in tutta l'area interna sarà $\Delta^2 U = 0$.

Dunque *la distribuzione delle correnti nella lamina avviene come se non vi fosse il campo magnetico, ma il potenziale fosse* U *anzichè* V, *e la conducibilità si conservasse eguale a* K. Siccome K è costante, così le linee di corrente sono indipendenti da K.

La funzione U si chiamerà la *funzione fondamentale della distribuzione delle correnti nella lamina*, o, più semplicemente, la *funzione fondamentale*. Essa non coincide col *potenziale*, altro che se il campo magnetico è nullo. Allorchè si conosce il potenziale V, per ottenere U basta la operazione

$$(E) \qquad U = V + \lambda V' = \frac{V \cos\beta + V' \operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}.$$

(¹) Essa sarà determinata a meno di una costante arbitraria additiva.

Risolviamo adesso il problema di *calcolare il potenziale quando si conosce la funzione fondamentale.*

Faremo, come precedentemente, uso dell'aggiunta di un apice per denotare la funzione coniugata di una funzione armonica data. Quindi

$$(8) \qquad U' = V' - \lambda V ;$$

onde, tenendo conto della (E), resulterà

$$(E') \qquad V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = (U \cos\beta - U' \operatorname{sen}\beta) \cos\beta .$$

Il problema propostoci è quindi risoluto.

Se poniamo

$$x + iy = z \quad , \quad U + iU' = f(z) \quad , \quad V + iV' = \varphi(z) ,$$

avremo

$$(E'') \qquad f(z) = \frac{e^{-i\beta}}{\cos\beta}\, \varphi(z) .$$

Fisica. — *Arco e scintilla. (Rilievi sopra una Nota del prof. A. Occhialini).* Nota di M. La Rosa, presentata del Corrispondente D. Macaluso.

Varie circostanze mi hanno impedito, finora, di mettere insieme alcuni rilievi sulla Nota *Scintilla ed arco*, del prof. Occhialini [1], nella quale sono chiamato in causa.

E per prima cosa faccio questione, dirò così, di esattezza storica; perchè non credo che il mio nome venga ben a posto citato, in una discussione intorno alla *vera* distinzione fra arco e scintilla, non essendomi fino a questo momento occupato di un tale argomento.

Nel lavoro, di cui il prof. Occhialini cita un passo [2], ho sostenuto semplicemente questa tesi: « che *la natura dello spettro emesso da un vapore o gas attraversato dalla scarica* (e forse, più generalmente, eccitato in un modo qualsiasi) *debba dipendere essenzialmente dalla potenza spesa nell'unità di massa eccitata, e che limitata e secondaria debba essere l'influenza del modo con cui tale potenza viene introdotta* » [3].

Ho fatto, dunque, soltanto questione di struttura spettrale, sostenendo il concetto che questa *non dipenda dalle modalità della scarica, dalla peculiarità del fenomeno che produce* l'emissione, e, più generalmente, dai

(1) Nuovo Cimento, vol. VII, ser. VI, pag. 365 (1914).
(2) Mem Lincei, vol. VII, pag. 451, giugno 1908.
(3) loc. cit., pag. 466, capoverso 3°.