

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

~~~~~  
*Seduta del 21 febbraio 1915.*

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Fisica matematica. — Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico. Nota II del Socio VITO VOLTERRA.*

15. La funzione coniugata di  $\log r_A$  è  $\theta_A$ , denotando con questo simbolo l'angolo che il raggio vettore spiccato dal punto A forma con una direzione fissa;  $-\frac{m}{2\pi} \theta_A$  è il potenziale di un vortice situato in A, di momento  $m$  <sup>(1)</sup>. Quindi, se si ha in A un elettrodo puntiforme da cui entra la corrente J, il corrispondente potenziale sarà (§ 7)

$$-\frac{J}{2\pi K} \log r_A,$$

e la corrispondente funzione fondamentale

$$-\frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \lambda \theta_A) = \frac{J}{2\pi K} \log \frac{1}{r_A} - \frac{\lambda J}{2\pi K} \theta_A;$$

dunque la funzione fondamentale corrispondente ad un elettrodo punti-

<sup>(1)</sup> Supposta l'orientazione degli assi  $x$  e  $y$  come è indicata nella figura 1 del § 2, noi supponiamo di contare l'angolo  $\theta_A$  nel senso contrario a quello secondo cui ruotano le lancette di un orologio, mentre ammettiamo che un vortice di momento positivo ruoti nel verso delle lancette di un orologio.

forme in A, ove entra la corrente di intensità J, è il potenziale logaritmico di una massa  $\frac{J}{2\pi K}$  e di un vortice di momento  $\frac{\lambda J}{K}$  situato nel punto A.

Questo risultato può enunciarsi dicendo che l'azione del campo magnetico sulla distribuzione delle correnti si esplica, modificando la funzione fondamentale, coll'aggiungere ad ogni elettrodo un vortice il cui momento è eguale alla intensità moltiplicata per  $\lambda$  divisa per la conducibilità, mentre si mantiene nulla la derivata normale della funzione fondamentale nei punti del contorno libero ed isolato (<sup>1</sup>).

La funzione  $\theta_A$  è polidroma: quindi la funzione fondamentale è una funzione polidroma, la quale ha per punti di diramazione gli elettrodi. Dunque, mentre il potenziale è monodromo, e gli elettrodi puntiformi sono i punti di infinito logaritmico, la funzione fondamentale ha negli elettrodi punti di infinito logaritmico e di diramazione.



FIG. 12.

16. Supponiamo, adesso, che la lamina sia circolare, e la corrente entri ed esca da elettrodi puntiformi interni. Cerchiamo di calcolare l'effetto del contorno C (che è di render nulla la derivata normale della funzione fondamentale) coll'aggiunta di masse e di vortici immagini distribuiti nei punti reciproci degli elettrodi interni rispetto al contorno.

Sia  $A_1$  il punto reciproco dell'elettrodo A. Se in  $A_1$  disponiamo una massa  $\frac{J}{2\pi K}$ , il potenziale logaritmico delle due masse  $\frac{J}{2\pi K}$  distribuite in A e  $A_1$  avrà la derivata normale lungo C eguale a

$$-\frac{J}{2\pi KR}$$

(<sup>1</sup>) L'aggiunta del vortice per l'azione del campo magnetico risulta ben naturale quando si pensi all'azione deviatrice prodotta dal campo stesso sul moto degli elettroni nell'intorno dell'elettrodo.

essendo  $R$  il raggio del contorno; e se in  $A_1$  disponiamo un vortice di momento

$$-\frac{\lambda J}{K},$$

il potenziale dei due vortici di momenti  $-\frac{\lambda J}{K}$  e  $\frac{\lambda J}{K}$  disposti in  $A_1$  e  $A$  avrà la derivata normale nulla al contorno.

Tenendo presente che le somme algebriche delle intensità delle correnti che entrano dai vari elettrodi interni è nulla, si otterrà dunque, come espressione della funzione fondamentale,

$$(9) \quad U = -\sum \frac{J}{2\pi K} \{ \log r_A + \log r_{A_1} + \lambda \theta_A - \lambda \theta_{A_1} \},$$

essendo estesa la somma a tutti gli elettrodi interni.

La espressione stessa può scriversi:

$$U = -\sum \frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \lambda \theta_A) + \psi,$$

ove

$$\psi = -\sum \frac{J}{2\pi K} (\log r_{A_1} - \lambda \theta_{A_1});$$

ed evidentemente  $\psi$  è regolare entro l'area occupata dalla lamina, giacchè i punti di infinito e di diramazione sono tutti esterni all'area stessa.

Il risultato ottenuto può enunciarsi nei termini seguenti:

*La distribuzione delle correnti che entrano ed escono da elettrodi puntiformi in una lamina circolare soggetta ad un campo magnetico, è quella stessa che si avrebbe sopprimendo il campo magnetico, rendendo indefinita la lamina ed aggiungendo ad ogni elettrodo ove la intensità è  $J$  un vortice di momento  $\frac{\lambda J}{K}$ ; inoltre aggiungendo, nel punto reciproco di ciascun elettrodo interno, un elettrodo immagine ove la intensità è la stessa, ed un vortice immagine del vortice interno di momento invertito.*

17. Poichè abbiamo calcolato, mediante la formola (9), la funzione fondamentale della distribuzione delle correnti, così, applicando la regola (E'), possiamo ricavare dalla espressione ottenuta il potenziale.

Cominciamo dall'esprimere la funzione coniugata di  $U$ . Questa sarà

$$U' = -\sum \frac{J}{2\pi K} (\theta_A + \theta_{A_1} - \lambda \log r_A + \lambda \log r_{A_1}),$$

e perciò il potenziale risulterà

$$(10) \quad V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = -\sum \frac{J}{2\pi K} \left( \log r_A + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \log r_{A_1} - \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \theta_{A_1} \right).$$

Ora, poichè  $\lambda = \operatorname{tg} \beta$ , abbiamo

$$\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} = \cos 2\beta \quad , \quad \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} = \operatorname{sen} 2\beta \quad ,$$

quindi

$$(10') \quad V = - \sum \frac{J}{2\pi K} (\log r_\lambda + \cos 2\beta \cdot \log r_{\lambda_1} - \operatorname{sen} 2\beta \cdot \theta_{\lambda_1}) \quad .$$

Questa espressione può scriversi

$$(10'') \quad V = - \sum \frac{J}{2\pi K} \log r_\lambda + \varphi \quad ,$$

ove

$$(10_a) \quad \varphi = - \sum \frac{J}{2\pi K} (\cos 2\beta \cdot \log r_{\lambda_1} - \operatorname{sen} 2\beta \cdot \theta_{\lambda_1}) \quad .$$

Il primo termine delle (10'') è il potenziale degli elettrodi, ed il secondo termine  $\varphi$  è una funzione regolare nell'area occupata dalle lamina, giacchè i punti di infinito e di diramazione sono esterni.

Il risultato conseguito può enunciarsi nei termini seguenti:

*Se in una lamina circolare soggetta ad un campo magnetico, le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi, il potenziale si otterrà aggiungendo a quello di ciascun elettrodo ove la intensità è J il potenziale di un elettrodo immagine situato nel punto reciproco di intensità  $J \cos 2\beta$ , e quello di un vortice pure disposto nel punto reciproco di momento  $-\frac{J \operatorname{sen} 2\beta}{K}$ .*

18. Esistono dunque due diversi principii delle immagini nel caso in cui la lamina è soggetta al campo magnetico, uno dei quali è relativo alla distribuzione delle correnti e quindi alla *funzione fondamentale*, e l'altro al *potenziale elettrico*.

19. Questi stessi risultati possono ottenersi molto facilmente adoperando le funzioni di variabili complesse introdotte alla fine del § 14. Osserviamo che se  $a$  ed  $a'$  denotano gl'indici di due punti reciproci rispetto ad un cerchio nel piano complesso  $z = x + iy$  e  $\sum M = 0$  essendo le  $M$  e la  $m$  reali, si ha che la funzione

$$(11) \quad e^{im} \sum M \log(z - a) - e^{-im} \sum M \log(z - a')$$

ha la parte reale costante sulla periferia del cerchio, e

$$(11') \quad e^{im} \sum M \log(z - a) + e^{-im} \sum M \log(z - a')$$

ha costante la parte immaginaria.

Ora se denotiamo con  $a$  gl'indici degli elettrodi puntiformi il potenziale degli elettrodi è la parte reale della funzione di variabile complessa

$$\varphi = - \sum \frac{J}{2\pi K} \log(z - a),$$

quindi in virtù della (E'') la corrispondente funzione fondamentale sarà la parte reale di

$$f = \frac{-e^{-i\beta}}{\cos \beta} \sum \frac{J}{2\pi K} \log(z - a).$$

Tenendo conto del contorno circolare la funzione fondamentale dovrà risultare quindi, a cagione della (11'), come parte reale di

$$F = - \sum \frac{1}{2\pi K \cos \beta} (e^{-i\beta} \log(z - a) + e^{i\beta} \log(z - a')),$$

e per conseguenza, per la (E''), il potenziale elettrico sarà la parte reale di

$$\Phi = - \sum \frac{1}{2\pi K} (\log(z - a) + e^{2i\beta} \log(z - a')),$$

da cui risultano immediatamente le formule (9) e (10).

20. Noi abbiamo fin qui supposto che gli elettrodi puntiformi fossero interni, ammettiamo ora che vadano al contorno. Basterà nelle formule (9) e (10) supporre coincidenti i punti  $A$  e  $A_1$ , ossia

$$\log r_A = \log r_{A_1}, \quad \theta_A = \theta_{A_1},$$

e perciò avremo

$$U = - \sum \frac{J}{\pi K} \log r_A$$

$$V = - \sum \frac{J}{\pi K} (\cos \beta \cdot \log r_A - \sin \beta \cdot \theta_A) \cos \beta.$$

Ne segue che, se gli elettrodi puntiformi sono al contorno, il campo magnetico non altera la distribuzione delle correnti, mentre altera il potenziale elettrico.

21. Se gli elettrodi sono due  $A$  e  $B$ , le formule (9) e (10) divengono

$$U = \frac{J}{2\pi K} \left( \log \left( \frac{r_B r_{B_1}}{r_A r_{A_1}} \right) + \lambda (\Omega_{AB} - \Omega_{A_1 B_1}) \right),$$

$$V = \frac{J}{2\pi K} \log \left( \frac{r_B r_{B_1}}{r_A r_{A_1}} \right) - \frac{J}{\pi K} \sin \beta \left( \log \left( \frac{r_{B_1}}{r_{A_1}} \right) \sin \beta + \Omega_{A_1 B_1} \cos \beta \right),$$

ove  $\Omega_{AB} = \theta_B - \theta_A$ ,  $\Omega_{A_1 B_1} = \theta_{B_1} - \theta_{A_1}$  sono gli angoli sotto cui si vedono dal punto generico  $x, y$  le due coppie di punti  $A, B$  e  $A_1, B_1$ .

Se i due elettrodi sono al contorno, allora

$$U = \frac{J}{\pi K} \log \frac{r_B}{r_A}, \quad V = \frac{J}{\pi K} \left( \cos \beta \cdot \log \frac{r_B}{r_A} - \operatorname{sen} \beta \cdot \Omega_{AB} \right) \cos \beta.$$

22. Allorchè gli elettrodi sono puntiformi il problema è quindi risoluto completamente nel caso in cui la lamina è circolare. Per conseguenza esso si risolverà anche in tutti i casi in cui *l'area occupata dalla lamina sarà rappresentabile conformemente in un cerchio*.

23. Consideriamo il caso in cui gli elettrodi puntiformi sono al contorno, allora, *comunque sia la forma della lamina, purchè essa sia semplicemente connessa, la distribuzione delle correnti non viene alterata dall'azione del campo magnetico*. Ciò dipende dal risultato ottenuto nel caso del cerchio (§ 20) e trasportato in un campo generale semplicemente connesso mediante la rappresentazione conforme, e può ricavarsi anche direttamente dalle condizioni a cui deve soddisfare  $U$  (§ 14).

Infatti se il campo è semplicemente connesso e gli elettrodi puntiformi sono al contorno,  $U$  è monodromo; al contorno  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ ; inoltre, se con un arco di curva qualunque  $\varepsilon$  stacciamo la regione ove esiste l'elettrodo dalla rimanente area della lamina, deve aversi

$$\int_{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n} d\varepsilon = - \frac{J}{K}.$$

ove  $J$  è l'intensità della corrente che esce dall'elettrodo. Quindi, se la intensità delle correnti non vengono alterate,  $U$  non può differire dal potenziale elettrico nel caso in cui manchi il campo magnetico.

Chiameremo questa proposizione il *principio degli elettrodi puntiformi al contorno*. Evidentemente se la lamina non è semplicemente connessa, la sua area non è rappresentabile conformemente nel cerchio, nè può dirsi che  $U$  deve essere monodroma, quindi le dimostrazioni date non valgono più in questo caso, e difatti la proposizione precedente in generale non è vera quando la lamina non è semplicemente connessa (cfr. § 32).

24. Da quanto è stato trovato nel paragrafo precedente risulta che *se noi conosciamo la legge della distribuzione delle correnti in una lamina qualunque semplicemente connessa non soggetta al campo magnetico, allorchè gli elettrodi puntiformi sono al contorno, potremo conoscere  $U$  onde, applicando le regole del § 14, data mediante la (E'), potremo avere il potenziale elettrico nel caso in cui agisce il campo magnetico*.

Per esempio: se una lamina rettangolare non è soggetta al campo magnetico noi sappiamo esprimere (secondo i calcoli del Betti) <sup>(1)</sup>, mediante

(1) Betti, *Opere*, vol. II, pag. 267.

la funzione ellittica  $\Delta am$ , la distribuzione delle correnti allorchè gli elettrodi sono nei punti di mezzo di due lati opposti; applicando dunque le precedenti considerazioni potremo risolvere l'analogo problema quando la lamina è soggetta ad un campo magnetico.

25. Abbiansi delle correnti di date intensità che entrano ed escono in una lamina da elettrodi puntiformi al contorno. Supponiamo di non alterare le intensità stesse allorchè si assoggetta la lamina (supposta semplicemente connessa) al campo magnetico.

Se  $u$  è la funzione fondamentale prima che esista il campo e  $U$  quando esiste il campo magnetico, avremo

$$U = \rho u,$$

ove  $\rho$  è il rapporto delle conducibilità della lamina nei due casi, quindi per la regola (E'), indicando sempre con un apice la funzione coniugata di una funzione data armonica,

$$V = \rho \frac{u - \lambda u'}{1 + \lambda^2}.$$

Conduciamo la rete delle linee di corrente e delle linee equipotenziali nel caso in cui manchi il campo magnetico MN e QP siano linee di corrente, e MQ e NP linee equipotenziali. Avremo

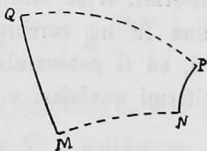


FIG. 13.

$$u_M = u_Q, u_N = u_P, u'_M = u'_N, u'_Q = u'_P,$$

e per conseguenza

$$V_M - V_N + V_P - V_Q = 0,$$

donde il teorema: *Allorchè gli elettrodi puntiformi sono al contorno, se si considera un quadrilatero formato da linee di corrente e di livello corrispondenti al caso in cui manchi il campo magnetico, e si determinano i valori del potenziale elettrico ai quattro vertici allorchè agisce il campo magnetico, la differenza dei valori in due vertici adiacenti è eguale alla differenza negli altri due.*

Questa proposizione che chiameremo il *teorema dei quattro vertici* è suscettibile di facile verifica sperimentale.



26. Supponiamo in particolare che la lamina sia circolare, le correnti entrino ed escano dagli elettrodi puntiformi A e B al contorno. Tracciamo i cerchi che passano per A e B ed i cerchi ortogonali. Qualunque sia il

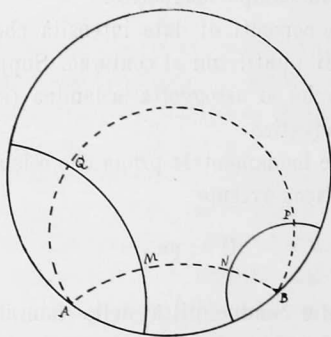


FIG. 14.

campo magnetico per un quadrilatero MNPQ formato con questi cerchi

$$V_M - V_N + V_P - V_Q = 0.$$

27. Il risultato enunciato nel § 22 può notevolmente estendersi; infatti, se si conosce la legge di distribuzione delle correnti in una lamina semplicemente connessa non soggetta al campo magnetico allorchè la corrente entra ed esce da due elettrodi puntiformi, si sa fare la rappresentazione conforme dell'area occupata dalla lamina in un cerchio, onde si saprà determinare la distribuzione delle correnti, ed il potenziale quando le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi qualsiasi e la lamina è soggetta ad un campo magnetico.

28. Varie fra le proposizioni date valgono tanto se l'area occupata dalla lamina è semplicemente connessa, quanto se è più volte connessa, altre (e lo si è dichiarato esplicitamente volta per volta) non valgono che se si tratta d'un'area semplicemente connessa.

Le formole ed i teoremi di reciprocità dati nei §§ 11, 12, 13 sussistono evidentemente anche nel caso in cui la lamina è più volte connessa. Solo in questo caso essi possono assumere un aspetto alquanto diverso, giacchè le porzioni del contorno ove il potenziale è costante possono essere alcune delle intere linee chiuse il cui insieme forma il contorno totale dell'area più volte connessa, occupata dalla lamina.

Supponiamo la lamina  $\sigma$  limitata da più linee chiuse  $s'_1, s'_2, \dots, s'_n$ ;  $s''_1, s''_2, \dots, s''_m$ , e ammettiamo che le prime siano libere ed isolate, e le seconde siano mantenute ad un potenziale costante. Chiameremo  $S'$  l'insieme delle prime linee, ed  $S''$  l'insieme delle altre. Escluderemo per semplicità l'esistenza di elettrodi puntiformi.

Con il campo magnetico diretto i valori del potenziale  $V$  in  $s_1'', s_2'', \dots, s_m''$  siano rispettivamente  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$  e con il campo magnetico invertito i valori del potenziale  $V_1$  siano  $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \dots, C_1^{(m)}$ . Denotiamo poi con  $J^{(1)}, J^{(2)}, \dots, J^{(m)}$  le quantità di elettricità che penetrano nell'unità di tempo nella lamina attraverso i contorni  $s_1'', s_2'', \dots, s_m''$  allorchè si sperimenta col campo elettrico diretto, e denotiamo con  $J_1^{(1)}, J_1^{(2)}, \dots, J_1^{(m)}$  le quantità di elettricità che penetrano attraverso gli stessi contorni quando si sperimenta col campo elettrico invertito. Applicando i risultati del § 12 avremo

$$\sum_h J^{(h)} C^{(h)} = \sum_h J_1^{(h)} C^{(h)}.$$

Se noi consideriamo  $s_1'', s_2'', \dots, s_m''$  come orli di elettrodi di resistenza trascurabile le  $J^{(h)}$  e  $J_1^{(h)}$  sono rispettivamente le intensità delle correnti che penetrano dagli elettrodi stessi. Dalla precedente relazione si ricavano quindi evidentemente le proposizioni di reciprocità nel caso di elettrodi interni di area finita e di resistenza trascurabile.

29. Ciò premesso consideriamo il caso del campo magnetico diretto, e impieghiamo la regola (E) (§ 14) per passare dal potenziale  $V$  alla funzione fondamentale  $U$ . Avremo

$$(12) \quad U = V + \lambda V',$$

e se tracciamo una linea chiusa  $s$  nell'area occupata dalla lamina

$$\int_s \frac{\partial V'}{\partial s} ds = - \int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{K} (J^{(\alpha)} + J^{(\beta)} + \dots + J^{(\rho)}),$$

denotando con  $s_\alpha'', s_\beta'', \dots, s_\rho''$  i contorni interni alla linea  $s$ .

Ne segue che la funzione  $V'$  è polidroma, i cicli di polidromia sono quelli che contengono nell'interno i contorni  $s_\alpha'' \dots$  ed i moduli di polidromia sono i numeri  $\frac{J_\alpha}{K}$ .

Poichè  $V$  è monodroma (cfr. § 2),  $U$  avrà la stessa polidromia di  $V'$  salvo che i moduli di polidromia saranno cambiati nel rapporto  $\lambda$ .

30. Applicando le formule (A) e (B) del § 2 si deduce (cfr. § 4)

$$\sum_h J^{(h)} = 0 \quad , \quad \sum_h J^{(h)} C^{(h)} = K \int_\sigma \mathcal{A} V d\sigma.$$

Dall'ultima si ricava che se le  $J^{(h)}$  sono zero sopra alcuni dei contorni  $s_h''$  e le  $C^{(h)}$  sono zero sopra i rimanenti  $s_h''$ ,  $V$  deve essere nulla; e se si sa che tutte le  $J^{(h)}$  sono nulle,  $V$  deve essere costante. Se ne conclude che la conoscenza delle  $J^{(h)}$  determina  $V$  a meno di una costante e la conoscenza di alcune delle  $J^{(h)}$  e delle rimanenti  $C^{(h)}$  determina completamente  $V$ .

Supponiamo che manchino i contorni liberi ed isolati  $s'_h$ , e che siano note tutte le  $C^{(h)}$ ,  $V$  sarà determinato e sarà indipendente dalla conducibilità  $K$ . Se invece sono note tutte le  $J^{(h)}$ ,  $V$  cambierà in ragione inversa delle conducibilità  $K$ . Se finalmente sono note in parte le  $C^{(h)}$ , ed in parte le  $J^{(h)}$ ,  $V$  dipenderà dalla conducibilità  $K$ .

*Da tutto ciò segue che se ciascuna delle diverse linee che costituiscono il contorno ha un potenziale costante inalterabile, il potenziale elettrico non dipenderà dal campo magnetico, ma il campo magnetico altererà la funzione fondamentale, e quindi la distribuzione delle correnti.*

Ne risulta che se noi conosceremo la distribuzione delle correnti quando manca il campo magnetico, e quindi il potenziale  $V$ , mediante la formula (E) potremo calcolare l'alterazione delle correnti stesse.

In modo analogo avremo risultati simili se si suppongono note ed inalterabili le  $J^{(h)}$ .

Questi ultimi risultati sono in perfetto accordo con quanto aveva già riconosciuto il prof. Corbino nel caso di due contorni a potenziale inalterabile <sup>(1)</sup>. Supponiamo in particolare che i due contorni della lamina siano due circonferenze concentriche di raggi  $R_1$  e  $R_2$ . Avremo allora

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{(C^{(1)} - C^{(2)}) \log r + C^{(2)} \log R_1 - C^{(1)} \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \\ V' = \frac{(C^{(1)} - C^{(2)})}{\log R_1 - \log R_2} \theta \\ U = \frac{(C^{(1)} - C^{(2)}) (\log r + \lambda \theta)}{\log R_1 - \log R_2} + C, \end{array} \right.$$

ove  $r$  e  $\theta$  sono le coordinate polari dei punti dell'anello circolare che costituisce la lamina avendo preso come origine il centro, e  $C$  è una costante.

Se la corrente entra dal cerchio maggiore di raggio  $R_1$ , e la sua intensità è  $I$ , avremo

$$V = \frac{I}{2\pi K} \log r, \quad V' = \frac{I}{2\pi K} \theta, \quad U = \frac{I}{2\pi K} (\log r + \lambda \theta).$$

31. I risultati del § 29 si possono estendere. Supponiamo in generale di avere una lamina più volte connessa limitata dalle linee chiuse  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Senza fare alcuna ipotesi sui valori del potenziale lungo di esse e sul modo

<sup>(1)</sup> O. M. Corbino, *Azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli deviate dalla traiettoria normale per effetto di un campo*, Nuovo Cimento, ser. VI, vol. I; E. P. Adams, *Some electromagnetic Effects related to the Hall Effect*, Phil. Magazine, vol. XXVII, Sixth Series; E. P. Adams und A. K. Chapman, *The Corbino Effect*, Phil. Mag., vol. XXVIII, Sixth Series.

come sono disposti lungo di esse degli elettrodi puntiformi o lineari, denotiamo con  $J_1, J_2, \dots, J_n$  le quantità di elettricità che nell'unità di tempo entrano nelle lamine attraverso le linee stesse.

Abbiansi poi degli elettrodi puntiformi  $M_1, M_2, \dots, M_m$  interni da cui penetrano delle correnti di intensità  $I_1, I_2, \dots, I_m$ . Avremo

$$\sum_1^n J_h + \sum_1^m I_h = 0,$$

e se una linea chiusa  $s$  interna al campo racchiude nel suo interno le linee  $s_\alpha, s_\beta, \dots, s_\tau$ , e i punti  $M_a, M_b, \dots, M_t$ , avremo

$$\int \frac{\partial V'}{\partial s} ds = - \int \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{K} (J_\alpha + J_\beta + \dots + J_\tau + I_a + I_b + \dots + I_t).$$

Ciò prova che  $V'$  e quindi  $U$  è polidroma a meno che tutte le  $J_1, J_2, \dots, J_n, I_1, I_2, \dots, I_m$  non siano nulle. D'onde il teorema

*Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione fondamentale sia monodroma è che non esistano elettrodi puntiformi interni, e che la quantità totale di elettricità che entra dagli elettrodi distribuiti lungo ciascuna linea chiusa che fa parte del contorno sia nulla.*

Nel caso invece in cui l'area occupata dalla lamina sia semplicemente connessa, basta che non esistano elettrodi puntiformi interni perchè la funzione fondamentale sia monodroma, mentre la loro presenza la rende polidroma.

32. Diamo subito un'applicazione dei risultati ora ottenuti. Supponiamo che l'area sia più volte connessa e che tutti gli elettrodi siano *puntiformi*, e distribuiti lungo le linee stesse  $s_1, s_2, \dots, s_n$  che formano il contorno. Siano  $i_p^{(1)}, i_p^{(2)}, \dots, i_p^{(n)}$  le intensità delle correnti che entrano dagli elettrodi distribuiti lungo la linea  $s_p$ . La condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione fondamentale sia monodroma è che

$$\sum_1^n i_p^{(l)} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Ora se la funzione fondamentale è monodroma noi potremo, ripetendo il ragionamento fatto nel § 23, dimostrare che il campo magnetico non altera la distribuzione delle correnti, mentre se la funzione stessa è polidroma, avremo che l'azione del campo magnetico dovrà far cambiare la distribuzione delle correnti, giacchè quando esso non esiste la funzione fondamentale coincide col potenziale e quindi è monodroma.

Si avrà dunque il teorema seguente:

*Se la lamina è più volte connessa e tutti gli elettrodi sono puntiformi e distribuiti al contorno, l'azione del campo magnetico non altererà*

la distribuzione delle correnti solo quando la somma delle intensità delle correnti che penetrano dagli elettrodi disposti su ciascuna linea chiusa che forma una parte del contorno sia nulla.

33. Quando la condizione precedente sia soddisfatta, e si conosca la legge della distribuzione delle correnti nella ipotesi che non agisca il campo magnetico, potremo mediante la regola (E') calcolare il potenziale corrispondente allorchè agisce il campo magnetico, precisamente come nel caso del campo semplicemente connesso, e quindi risolvere completamente il problema.

Resta da risolverlo quando la suddetta condizione non sia soddisfatta.

A tal fine denotiamo con  $s_1$  la linea chiusa che forma il contorno esterno della lamina più volte connessa, con  $s_2, s_3, \dots, s_n$  le linee chiuse che

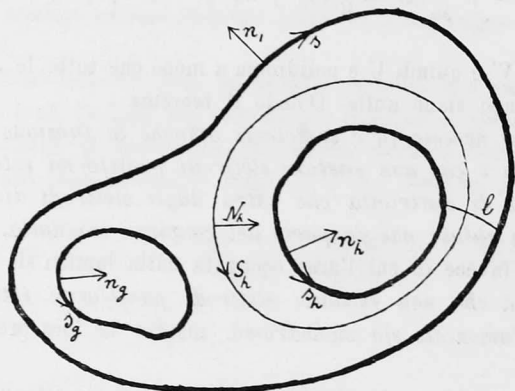


FIG. 15.

formano i contorni interni. Tracciamo una linea  $l$  che congiunga  $s_1$  con  $s_h$  senza incontrare altre linee del contorno, e immaginiamola sede di una forza elettromotrice  $1$  diretta nel senso in cui cresce l'arco  $s_h$ . Supposto che la lamina non sia soggetta al campo magnetico, il potenziale elettrico  $\varphi_h$  sarà una funzione armonica regolare nel campo occupato dalla lamina stessa che avrà una discontinuità  $1$  lungo  $l$ . Inoltre

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_2} = \dots = 0, \quad \int_{s_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial s_h} ds_h = -1, \quad \int_{s_g} \frac{\partial \varphi_h}{\partial s_g} ds_g = 0, \quad 1 < g \leq h.$$

$\varphi_h$  potrà ancora considerarsi come una funzione armonica finita e continua *polidroma* nel campo liberato dal taglio  $l$  i cui cicli di polidromia abbracciano  $s_h$  e il cui modulo di polidromia è  $-1$ . Le funzioni  $\varphi_2, \varphi_3, \dots$  dipenderanno soltanto dalla forma geometrica del campo e le chiameremo i suoi *potenziali ciclici elementari*. Denoteremo con  $\varphi'_2, \varphi'_3, \dots$  le loro coniugate <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> I potenziali ciclici elementari si considerano nella idrodinamica classica per

Ciò premesso supponiamo tolta ogni forza elettromotrice interna nel campo, e chiamiamo  $W$  il potenziale elettrico quando le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi disposti lungo le varie linee chiuse che costituiscono il contorno,  $V$  il potenziale elettrico quando agisce il campo magnetico,  $U$  la funzione fondamentale.

Sia  $J_h$  la somma algebrica delle intensità delle correnti che entrano ed escono dagli elettrodi distribuiti sopra  $s_h$ . Se  $S_h$  è una linea che abbraccia la sola  $s_h$ , avremo

$$J_h = K \int_{S_h} \frac{\partial V}{\partial N_h} dS_h = K \int_{S_h} \frac{\partial W}{\partial N_h} dS_h = -K \int_{S_h} \frac{\partial V'}{\partial S_h} dS_h = -K \int_{S_h} \frac{\partial W'}{\partial S_h} dS_h,$$

ove  $V'$  e  $W'$  sono coniugate di  $V$  e  $W$ .

Ne segue (Vedi formula E)

$$\int_{S_h} \frac{\partial U}{\partial N_h} dS_h = \int_{S_h} \frac{\partial(V + \lambda V')}{\partial N_h} dS_h = -\frac{\lambda J_h}{K},$$

quindi potremo prendere

$$U = W + \frac{\lambda}{K} \sum_h^n J_h \varphi_h,$$

giacchè essa soddisfa a tutte le condizioni a cui deve verificare la  $U$ .

Per avere  $V$  basta applicare la regola (E') e otterremo

$$V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{K} \sum_h^n J_h \varphi'_h - \lambda \left( W' - \frac{1}{K} \sum_h^n J_h \varphi_h \right)}{1 + \lambda^2}.$$

Dunque se si conoscono i potenziali ciclici elementari dell'area più volte connessa occupata dalla lamina, potremo determinare la perturbazione prodotta dal campo magnetico sulle correnti elettriche, qualunque esse siano, purchè entrino ed escano da elettrodi puntiformi situati al contorno.

Le due formole precedenti ci esprimono il principio degli elettrodi puntiformi al contorno modificato nel caso delle lamine più volte connesse (cfr. § 23).

ottenere i moti non vorticosi di un fluido in uno spazio più volte connesso limitato da pareti rigide. Essi corrispondono nella teoria della elasticità alle *distorsioni*. Se si conoscono le funzioni regolari armoniche  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  tali che  $\psi_h$  si annulla sulle  $s_1, \dots, s_n$  eccettuata  $s_h$  ove ha il valore 1, potremo ottenere (combinandole linearmente con coefficienti costanti) le  $\varphi'_h$  e quindi potremo ricavarne le  $\varphi_h$ . La conoscenza delle  $\varphi_h$  o delle  $\psi_h$  è quindi analiticamente equivalente.

34. Consideriamo il caso particolare in cui la lamina sia un anello limitato da due cerchi concentrici.

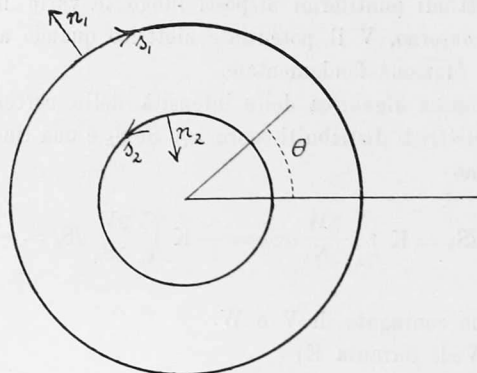


FIG. 16.

In questo caso il potenziale ciclico elementare è  $-\frac{\theta}{2\pi}$  ove  $\theta$  è l'angolo che il raggio vettore spiccato dal centro forma con una direzione fissa

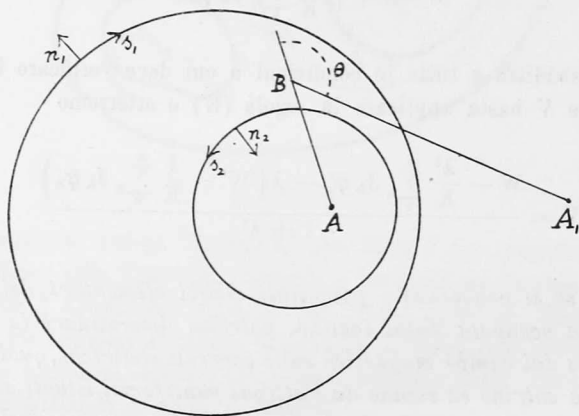


FIG. 17.

la cui funzione coniugata è  $\frac{\log r}{2\pi}$ . Quindi le formule precedenti divengono

$$U = W - \frac{\lambda}{2\pi K} J_2 \theta \quad , \quad V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{2\pi K} J_2 \log r - \lambda \left( W' + \frac{1}{2\pi K} \theta \right)}{1 + \lambda^2} .$$

Se i due cerchi non sono concentrici presi i punti A e A<sub>1</sub> immagini l'uno dell'altro per rapporto ai due cerchi contemporaneamente, il potenziale

ciclico elementare sarà  $-\frac{\theta}{2\pi}$  ove  $\theta$  è il supplemento dell'angolo sotto cui dal punto generico B della lamina si vede il segmento  $AA_1$ . La funzione coniugata sarà  $\frac{1}{2\pi} \log \frac{AB}{A_1B}$ .

**Matematica.** — *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

In due Note pubblicate l'anno scorso nei Rendiconti di questa R. Accademia (<sup>1</sup>) mi sono occupato di due problemi fondamentali che concernono il rotolamento di superficie applicabili nello spazio euclideo, o, più in generale, negli spazi di curvatura costante.

Un punto invariabilmente legato alla superficie rotolante descrive una superficie che diciamo *superficie di rotolamento*; similmente, un piano trascinato nel rotolamento involuppa una superficie che diciamo *involuppo di rotolamento*. Secondo i risultati stabiliti in quelle due Note, qualunque superficie  $\Sigma$  può generarsi infinite volte, sia come superficie, sia come involuppo di rotolamento; e ciascuna volta la ricerca delle infinite coppie corrispondenti di superficie applicabili dipende da un'equazione a derivate parziali del secondo ordine, ad ogni soluzione di questa corrispondendo una tale coppia di superficie applicabili.

La presente Nota ha per iscopo di stabilire che, se la superficie data  $\Sigma$  è *isoterma* (a linee di curvatura isoterme), si possono trovare  $\infty^4$  generazioni della superficie come superficie di rotolamento, integrando il sistema di equazioni differenziali ordinarie che traduce analiticamente le trasformazioni  $D_m$  di Darboux delle generali superficie isoterme (<sup>2</sup>). Per tal modo le trasformazioni  $D_m$  vengono ad acquistare un nuovo significato per la teoria del rotolamento, ad ogni tale trasformazione di una superficie isoterma  $\Sigma$  corrispondendo una generazione della  $\Sigma$  come superficie di rotolamento. Una delle due superficie applicabili, quella d'appoggio, è data dalla superficie  $S$ , luogo dei centri del corrispondente involuppo conforme di sfere; la superficie

(<sup>1</sup>) 1) *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili* (seduta del 4 gennaio 1914); 2) *Sul rotolamento di superficie applicabili, in geometria ellittica ed iperbolica* (seduta del 15 febbraio 1914).

Verranno qui citate come Nota 1), Nota 2).

(<sup>2</sup>) Cfr. Darboux, *Sur la déformation des surfaces du second degré, et sur les surfaces isothermiques* [Annales de l'École normale supérieure, III série, tom. XVI (1899)].

Ved. anche le mie due Memorie: a) *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche* [Annali di matematica, serie 3<sup>a</sup>, tom. XI (1905)]; b) *Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme* [ibid., tom. XII (1905)].

Qui saranno citate come Memorie a) e b).