ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Sopra una equazione integro-differenziale del tipo ellittico.* Nota di LUIGI SINIGALLIA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Le equazioni integro-differenziali del tipo ellittico sono state studiate dal prof. Volterra [1]. Quella, però, che io qui voglio considerare, non è stata trattata nè dal detto Autore, nè da altri. Ad essa sono applicabili i risultati noti per le equazioni dello stesso tipo, quando si conosca la soluzione fondamentale dell'equazione aggiunta: ed è la determinazione di tale soluzione che forma lo scopo principale di questa Nota.

2. L'equazione di cui qui vogliamo occuparci è la seguente:

$$(1)\qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(t,\tau) \right\} d\tau = 0,$$

ove

$$\Delta^2 u(t) = \frac{\partial^2 u(x,y|t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y|t)}{\partial y^2}.$$

Diremo che la funzione $u(x,y|t) \equiv u(t)$ pei valori di t compresi fra 0 e T è, nell'area σ limitata dal contorno s, una *soluzione regolare* della (1) quando soddisfa alla (1) e pei detti valori di t ed in tutti i punti $(x,y$ dell'area σ è finita continua assieme con le sue derivate prime e second rispetto ad x, y.

Collo stesso metodo tenuto dal prof. Volterra (loc. cit.) può dimostrarsi che: *a*) ogni soluzione regolare $u(t)$ della (1) è determinata nell'interno dell'area σ pei valori di t compresi fra 0 e T, se si conoscono per gli stessi valori di t i valori della u sul contorno s dell'area stessa; *b*) denotando con n la normale esterna al contorno s, e ponendo

$$(2)\qquad \mathrm{H}_s[u,v|\theta] \equiv \int_0^\theta dt \int_s \left\{ v(t)\frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t)\frac{\partial v(t)}{\partial n} \right\} ds +$$
$$+ \int_0^\theta dt \int_t^\theta d\tau \int_s \left\{ \left[v(\tau)\frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t)\frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right] f_{10}(\tau,t)\cos nx + \right.$$
$$\left. + \left[v(\tau)\frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t)\frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right] f_{01}(\tau,t)\cos ny \right\} ds,$$

[1] Volterra, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (Acta Mathematica, tom. 35); *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, 1913); *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti* (Rend. Lincei, ser. 5ª, vol. 20, 1° sem. 1911).

se $u(t)$ è una soluzione regolare della (1) e $v(x, y|t, \theta) \equiv v(t)$ è una soluzione regolare dell'*equazione aggiunta*

$$(3) \qquad \Delta^2 v(t) + \int_t^\theta \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(\tau, t) \right\} d\tau = 0,$$

si ha (*teorema di reciprocità*)

$$(4) \qquad \mathrm{H}_s[u, v|\theta] = 0.$$

3. Per avere la soluzione fondamentale della (3), cominciamo col considerare le costanti

$$\alpha^{(0)}_{m-p,p} = \alpha^{(0)}_{p,m-p} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{2m-2p}{m-p}}{\binom{m}{p}}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p,p} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2(m-i)+1}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{2m-2p-2i}{m-p-i}}{i\binom{m-i}{p}}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m-p)$$

$$\alpha^{(m-p+i)}_{m-p,p} = \frac{(-1)^{m+i+1}}{2^{2(p-i)+1}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{p}{i}}{(m-p+i)\binom{2i}{i}}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, p),$$

tra le quali sussistono le relazioni

$$\alpha^{(1)}_{m-p,p} = \frac{1}{2}\alpha^{(0)}_{m-p-1,p}, \quad \alpha^{(i)}_{m-p,p} = -\frac{i-1}{i}\alpha^{(i-1)}_{m-p-1,p}$$

$$(i = 2, 3, \ldots, m)$$

$$\alpha^{(0)}_{m-p-1,p+1} = -(\alpha^{(0)}_{m-p,p} + 2\alpha^{(1)}_{m-p,p}); \quad \alpha^{(m)}_{m-p-1,p+1} = -\alpha^{(m)}_{m-p,p}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p-1,p+1} = \frac{i+1}{i}\alpha^{(i+1)}_{m-p,p} - \alpha^{(i)}_{m-p,p} \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1),$$

dalle quali si deducono subito le altre

$$\alpha^{(1)}_{m-p,p} = \alpha^{(1)}_{p+1,m-p-1}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p,p} = -\alpha^{(i)}_{m-p,p-1} - \alpha^{(i)}_{m-p+1,p-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p,p} = \frac{i-1}{i}\alpha^{(i-1)}_{m-p,p-1} - \alpha^{(i)}_{m-p,p-1} \quad (i = 2, \ldots, m-1).$$

Per mezzo di queste relazioni si può dimostrare che

$$\sum_{s=i}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(s)} \binom{s}{i} = (-1)^i \alpha_{p,m-p}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\binom{2i}{i-1}}{2^{2i}} \alpha_{m-p,p}^{(i)} = \alpha_{m-p+1,p}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha_{m-p,p}^{(0)} = -\left\{ \alpha_{m-p,p+1}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha_{m-p,p}^{(0)} \right\} :$$

dalla prima di queste identità si deduce che

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(i)} = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_{p,m-p}^{(i)},$$

ed in particolare

$$\sum_{i=1}^{2p} \alpha_{p,p}^{(i)} = 0.$$

4. Se $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$, formiamo le funzioni

$$(5) \quad \begin{cases} \psi_{m-p,p} = \alpha_{m-p,p}^{(0)} \log r + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(i)} \left(\frac{y-b}{r}\right)^{2i} & (m \geqq 2p) \\ \psi_{m-p,p} = \alpha_{m-p,p}^{(0)} \log r + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{p,m-p}^{(i)} \left(\frac{x-a}{r}\right)^{2i} & (m \leqq 2p). \end{cases}$$

Si vede subito che i valori dati per $\psi_{p,p}$ dalle due equazioni (5) coincidono.

Si dimostra facilmente che

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_{m-p,p}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_{m-p-1,p+1}}{\partial x^2} \\ \Delta^2 \psi_{m-p,p} = -\frac{\partial^2 \psi_{m-p-1,p}}{\partial x^2} \quad (m-p > 0) \\ \Delta^2 \psi_{m-p,p} = -\frac{\partial^2 \psi_{m-p,p-1}}{\partial y^2} \quad (p > 0). \end{cases}$$

Inoltre, se s è una linea chiusa avente nel suo interno il polo (a, b), ed n è la normale esterna alla linea s, si ha

$$(7) \quad \begin{cases} \int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial n} ds = -\int_s \frac{\partial \psi_{m-p-1,p}}{\partial x} \cos nx \, ds \quad (m-p > 0) \\ \int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial n} ds = -\int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p-1}}{\partial y} \cos ny \, ds \quad (p > 0). \end{cases}$$

5. Le funzioni $f_{10}(t, \tau)$, $f_{01}(t, \tau)$ si suppongono finite ed integrabili pei valori delle variabili che si considerano. Se poniamo

$$f_{i,h}(t, \tau) = \sum_{j=0}^{\varrho} \int_{\tau}^{t} f_{i+j-\varrho, h-j}(t, \sigma) f_{\varrho-j, j}(\sigma, \tau) \, d\sigma \quad (\varrho < i + h),$$

e supponiamo nulla ogni f con indici negativi, la funzione $f_{i,h}(t,\tau)$ è indipendente da ϱ: in particolare

$$f_{i,h}(t,\tau)=\int_\tau^t\Big\{f_{i-1,h}(t,\sigma)\,f_{10}(\sigma,\tau)+f_{i,h-1}(t,\sigma)\,f_{01}(\sigma,\tau)\Big\}\,d\sigma=$$
$$=\int_\tau^t\Big\{f_{10}(t,\sigma)\,f_{i-1,h}(\sigma,\tau)+f_{01}(t,\sigma)\,f_{i,h-1}(\sigma,\tau)\Big\}\,d\sigma\,;$$

e se $|f_{10}(t,\tau)|<\mathrm{M}$, $|f_{01}(t,\tau)|<\mathrm{M}$, si ha

$$|f_{i,h}(t,\tau)|<\frac{2^{i+h-1}}{(i+h-1)!}\,\mathrm{M}^{i+h}|t-\tau|^{i+h-1}.$$

Essendo poi

$$|\alpha^{(0)}_{m-p,p}|<\frac{1}{2}\quad;\quad|\alpha^{(i)}_{m-p,p}|<\frac{1}{2i}\quad(i=1,2,\dots,m-p)$$

$$|\alpha^{(m-p+i)}_{m-p,p}|\leq\frac{1}{2(m-p+i)}\binom{p}{i}\quad(i=0,1,\dots,p),$$

si ha

$$|\psi_{m-p,p}|<\frac{1}{2}\{|\log r|+3^m\}.$$

Segue subito, di qui, che le serie

$$(8)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\psi_{m-p,p}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\psi_{m-p,p}\int_t^\theta \mathrm{F}(\tau)\,f_{m-p,p}(\tau,t)\,d\tau$$

[ove $\mathrm{F}(t)$ è una funzione limitata integrabile] pei valori considerati di t,θ in ogni campo che non racchiude il polo (a,b) convergono in modo assoluto ed uniforme.

Parimenti, essendo

$$\left|\frac{\partial\psi_{m-p,p}}{\partial x}\right|<\frac{3^m}{r}\quad;\quad\left|\frac{\partial\psi_{m-p,p}}{\partial y}\right|<\frac{3^m}{r}$$

$$\left|\frac{\partial^2\psi_{m-p,p}}{\partial x^2}\right|<\frac{2^{2m+1}.m}{r^2}\quad;\quad\left|\frac{\partial^2\psi_{m-p,p}}{\partial y^2}\right|<\frac{2^{2m+1}.m}{r^2},$$

le serie

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{\partial\psi_{m-p,p}}{\partial x}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{\partial\psi_{m-p,p}}{\partial y}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{\partial^2\psi_{m-p,p}}{\partial x^2}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{\partial^2\psi_{m-p,p}}{\partial y^2}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau$$

convergono in modo assoluto ed uniforme in ogni campo che non racchiude il polo (a, b). Lo stesso accade per le serie delle derivate prime e seconde rispetto ad x ed y dei termini della seconda delle serie (8). Concludiamo, così che in ogni campo che non contiene il polo (a, b) le serie (8) sono derivabili, termine a termine, due volte rispetto ad x e due volte rispetto ad y.

6. Posto ciò, si può verificare che la funzione

$$U(x, y|t) \equiv U(t) = F(t) \log r + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \psi_{m-p,p} \int_0^t f_{m-p,p}(t, \tau) F(\tau) d\tau$$

soddisfa alla (1), e che la funzione

$$V(x, y|t, \theta) \equiv V(t) = F(t) \log r + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \psi_{m-p,p} \int_t^\theta F(\tau) f_{m-p,p}(\tau, t) d\tau$$

soddisfa alla (3); inoltre, se s è una curva chiusa contenente nell'interno il polo (a, b), si ha

$$\int_s \left\{ \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\theta \left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f_{10}(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} f_{01}(\tau, t) \cos ny \right] d\tau \right\} ds =$$
$$= -2\pi F(t).$$

7. Volendo però determinare il valore della soluzione regolare della (1) in un punto (a, b) dell'area σ che assume valori assegnati sul contorno s dell'area stessa, dovremo servirci del teorema di reciprocità. Ora, descrivendo un piccolo circolo c interno all'area σ col centro in (a, b), la (4) ci dà

$$H_s[u, V|\theta] + H_c[u, V|\theta] = 0,$$

donde, facendo tendere a zero il raggio del circolo c, ricaviamo

$$u(a, b|\theta) \equiv u_0(\theta) = \frac{1}{2\pi F(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} H_s[u, V|\theta]. \tag{9}$$

Il secondo membro della (9) contiene i valori di u e delle sue derivate sul contorno s: per eliminare tali derivate, basta, al solito, conoscere una soluzione regolare ω della (3) e tale che $V + \omega$ sia nulla sul contorno s. Si avrà allora la formola

$$u(a, b|\theta) \equiv u_0(\theta) = \frac{1}{2\pi F(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} H_s[u, V + \omega|\theta], \tag{10}$$

che contiene solo i valori di u sul contorno s.

8. Se, invece della (1), si avesse l'equazione

$$\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(t, \tau) \right\} d\tau = X(x, y|t),$$

le formole (9) e (10) dovrebbero essere rispettivamente sostituite dalle due seguenti:

$$(9') \qquad u(a\,,b|\theta) \equiv u_0(\theta) =$$
$$= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{F}(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \mathrm{H}_s[u\,,\mathrm{V}|\theta] - \int_0^\theta dt \int_\sigma \mathrm{V}(t)\,\mathrm{X}(x\,,y|t)\,d\sigma \right\}$$

$$(10') \qquad u(a\,,b|\theta) \equiv u_0(\theta) =$$
$$= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{F}(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \mathrm{H}_s[u\,,\mathrm{V}+\omega|\theta] - \int_0^\theta dt \int_\sigma (\mathrm{V}(t)+\omega(t))\,\mathrm{X}(x\,,y|t)\,d\sigma \right\}.$$

Matematica. — *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Variazioni della birifrangenza magnetica del ferro colloidale con la temperatura.* Nota di L. Tieri, presentata dal Socio P. Blaserna.

Il Majorana [1], studiando il fenomeno della birifrangenza magnetica in molti campioni di soluzioni colloidali di ferro, trovò l'esistenza di tre tipi diversi di ferro dializzato attivo:

1° tipo: ferro dializzato a netta birifrangenza positiva.

2° tipo: ferro dializzato a birifrangenza negativa.

3° tipo: ferro dializzato che presenta birifrangenza positiva per campi deboli. Successivamente, al crescere del campo, la birifrangenza decresce, e per un certo valore del campo ritorna a zero (punto d' inversione). Per campi più intensi la birifrangenza diventa negativa.

Nel 1903 Schmauss [2], per un campione di ferro Bravais, negativo a temperatura ordinaria, notava una diminuzione di birifrangenza col crescere della temperatura: la birifrangenza si annullava fra 52° e 54°, e diventava positiva a temperature più elevate. Col raffreddamento il liquido riacquistava le proprietà primitive.

In questo lavoro ho studiato come agisce la temperatura sui diversi tipi di ferro dializzato attivo, ottenendo per risultato che ogni campione

[1] Rend. Accad. Lincei, 5ª ser., XII, 1° sem. 1902, pag. 463.

[2] Annalen der Physik, vol. XII, an. 1903, pag. 186.