ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 marzo 1915.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura come inviluppi di rotolamento.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Proseguendo le ricerche della mia antecedente comunicazione in questi Rendiconti (¹), mi occupo qui delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, considerate come *inviluppi di rotolamento*.

Si sa che qualsiasi superficie Σ può generarsi infinite volte come inviluppo di un piano che accompagna, in sistema rigido, una superficie S_0 mentre questa rotola sopra una superficie applicabile S. La ricerca di queste infinite generazioni della superficie data Σ come inviluppo di rotolamento, dipende da un'equazione a derivate parziali del secondo ordine, formata in altra mia Nota (²); ad ogni soluzione di questa equazione corrisponde una coppia (S_0, S) di superficie applicabili che dà una delle generazioni richieste.

Ora, se le linee di curvatura della superficie Σ hanno un'immagine sferica isoterma, accade che la detta equazione del secondo ordine ha a comune una soluzione, *con quattro costanti arbitrarie*, coll'altra pure del secondo ordine la quale esprime che, sulla superficie S d'appoggio, alle linee di curvatura di Σ corrisponde un sistema coniugato. Si trovano queste ∞^4 soluzioni co-

(¹) *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento* (Seduta del 21 febbraio 1915); nel testo citata come *nota B*).

(²) *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili* (questi Rendiconti, seduta del 4 gennaio 1914); nel testo citata come *nota A*).

muni integrando quel sistema differenziale ordinario che si presenta nelle trasformazioni delle superficie d'area minima dedotte dalla inversione del teorema di Guichard ([1]). Per dare ai risultati una migliore forma geometrica, conviene introdurre le più generali trasformazioni delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, che corrispondono alle dette trasformazioni delle superficie minime, e del resto si deducono subito da queste particolari combinate colle trasformazioni di Combescure. Esse furono trattate distesamente da Eisenhart ([2]), e verranno qui indicate come trasformazioni E_m, ponendo in evidenza (come per le D_m di Darboux) la costante m da cui dipendono, che rappresenta il parametro del paraboloide rotondo nel teorema di Guichard. Ogni superficie Σ a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, fissata la costante m, possiede ∞^3 superficie trasformate Σ' della medesima specie per mezzo di una E_m. La superficie Σ ed una qualunque delle trasformate Σ' sono le due falde di un inviluppo di sfere a linee di curvatura corrispondenti, la cui superficie luogo dei centri delle sfere indichiamo con S. Ora, se alla S, supposta flessibile ed inestendibile, si immaginano invariabilmente legati, al modo di Beltrami, i segmenti di normali alla Σ terminati alla superficie S, si vedrà che esiste una particolare configurazione S_0 della S, per la quale i termini dei detti segmenti, prima distribuiti sopra Σ, hanno per luogo, dopo la deformazione di S in S_0, un piano π (normale ai segmenti stessi). Ed allora, se la S_0 rotola sopra S seco trascinando come satellite il piano π, questo verrà ad inviluppare la superficie Σ. Così: *ad ogni trasformazione E_m di una superficie Σ a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura corrisponde una generazione di questa superficie come inviluppo di rotolamento.*

È importante poi di osservare che il sistema coniugato comune alla superficie d'appoggio S ed alla rotolante S_0 è quello che sulla S corrisponde alle linee di curvatura di Σ, precisamente come accadeva per le generazioni delle superficie isoterme quali superficie di rotolamento, considerate nella Nota precedente. La superficie rotolante S_0 è, così, già intrinsecamente definita; ma nel caso attuale si ha l'ulteriore semplificazione che la sua ricerca in termini finiti non richiede più l'integrazione di un'equazione di Riccati, effettuandosi con quadrature.

Come esempio si trattano qui le superficie coi due sistemi di linee di curvatura piane, e se ne trova una generazione come inviluppi di rotolamento, nella quale la superficie d'appoggio e la rotolante sono superficie di trasla-

([1]) Cfr. la mia Nota: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie d'area minima* (questi Rendiconti, agosto 1899); od anche le mie *Lezioni*, vol. II, § 351.

([2]) *Surfaces with isothermal representation of their lines of curvature and their transformations.* Transaction of the American mathematical Society, vol. IX (1908) e vol. XI (1910).

zione con curve generatrici in piani perpendicolari, corrispondendosi queste curve nell'applicabilità.

2. Abbiasi una superficie Σ, dapprima qualunque, che riferiamo alle sue linee di curvatura (u, v); e indichiamo con

$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2 \tag{1}$$

il quadrato del suo elemento lineare sferico rappresentativo, con r_1 ed r_2 i raggi principali di curvatura, che soddisferanno alle equazioni di Codazzi

$$\frac{\partial}{\partial u}(r_1\sqrt{g}) = r_2\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\;,\quad \frac{\partial}{\partial v}(r_2\sqrt{e}) = r_1\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\;. \tag{2}$$

Sopra ciascuna normale alla Σ riportiamo un segmento $R = R(u, v)$; e sia S la superficie luogo degli estremi, alle cui flessioni immaginiamo invariabilmente legati i segmenti stessi (n. 1). Affinchè esista una deformata S_0 della S, per la quale gli estremi dei detti segmenti si distribuiscano sopra un piano π, occorre e basta che R soddisfi alla equazione del secondo ordine (II) della Nota A) n. 3. Se poniamo

$$h_1 = \sqrt{e}\,(R + r_2)\quad,\quad h_2 = \sqrt{g}\,(R + r_1)\;, \tag{3}$$

questa equazione si scrive

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{1}{R + r_2}\,\frac{\partial R}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{e}{g}}\,\frac{1}{R + r_1}\,\frac{\partial R}{\partial v}\right) = \sqrt{eg}\;. \tag{I}$$

La corrispondente deformata S_0 si trova con sole quadrature, poichè si conosce allora la distanza R di un suo punto variabile dal piano fisso π (ved. *Lezioni*, vol. I, § 109). I coefficienti della seconda forma fondamentale di S_0, che indichiamo con D_0, D'_0, D''_0, sono dati dalle formole

$$D_0 = \frac{R_{11}}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}}\;,\quad D'_0 = \frac{R_{12}}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}}\;,\quad D''_0 = \frac{R_{22}}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}}\;, \tag{4}$$

dove il parametro differenziale e le derivate seconde covarianti di R s'intendono calcolati rispetto al ds^2 comune delle due superficie applicabili S, S_0.

Supponiamo, di più, che *alle linee di curvatura* (u, v) *di* Σ *corrisponda sopra* S *un sistema coniugato*. Questa condizione si traduce, per R, nell'altra equazione del secondo ordine [nota B) n, 2]:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}\;, \tag{II}$$

o anche, semplicemente, $R_{12} = 0$. Ma allora la media delle (4) mostra che avremo $D'_0 = 0$, cioè il sistema (u, v) sarà coniugato anche sopra S_0. Ora quando S_0 rotola sopra S il piano satellite π inviluppa la superficie Σ, e possiamo enunciare il risultato seguente, analogo a quello finale del n. 4 della Nota B):

Se, nel rotolamento di ***una superficie*** S_0 *sopra una superficie applicabile* S, *un piano* π *satellite di* S_0 ***inviluppa*** *una superficie* Σ *alle cui linee di curvatura corrisponda sopra* S *un* ***sistema*** *coniugato, questo è il* ***sistema*** *coniugato comune alla* ***superficie*** *d'appoggio* S *ed alla rotolante* S_0,

3. Da ora in poi supporremo che la superficie Σ abbia rappresentazione isoterma delle sue linee di curvatura, e verremo a provare che in tal caso le due equazioni del secondo ordine (I) e (II) hanno ∞^4 soluzioni comuni. Per questo introdurremo le trasformazioni E_m di Eisenhart, deducendole geometricamente da quelle particolari delle superficie minime.

Avendo Σ rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, esiste una superficie d'area minima (determinata a meno di un'omotetia) con la stessa immagine sferica delle linee di curvatura. A questa superficie minima, che diremo $\overline{\Sigma}$, applichiamo una delle ∞^3 trasformazioni che provengono dall'inversione del primo teorema di Guichard (*Lezioni*, vol. II, § 351), e sia $\overline{\Sigma}'$ la superficie minima derivata. Si sa che $\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}'$ sono le due falde di un inviluppo (conforme) di sfere e si corrispondono per le loro linee di curvatura, per cui il sistema ∞^2 di circoli normali a $\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}'$ in coppie di punti corrispondenti è un *sistema ciclico*. A questo sistema ciclico applichiamo una trasformazione di Combescure (*Lezioni*, vol. II, § 416), che lo cangi in un altro sistema ciclico, e di più in guisa che la trasformata della superficie minima $\overline{\Sigma}$ sia la superficie data Σ. In questo abbiamo ancora disponibile una costante arbitraria, p. es. il raggio del circolo normale a Σ in un punto iniziale. Nel nuovo sistema ciclico diciamo Σ' la superficie corrispondente alla superficie minima trasformata $\overline{\Sigma}'$, colla quale Σ' avrà a comune l'immagine (isoterma) delle linee di curvatura. Ora le due superficie Σ, Σ' ambedue a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, sono alla loro volta le due falde di un inviluppo di sfere e le linee di curvatura si corrispondono sulle due falde. Il passaggio da Σ a Σ' comporta, per quanto si è visto, *quattro* costanti arbitrarie, e dà appunto una trasformazione E_m.

4. Per dare alle formole delle trasformazioni E_m la forma meglio adatta al nostro scopo, introduciamo parametri isometrici u, v sulla sfera, e scriviamo il ds'^2 sotto la forma

$$ds'^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2),$$

onde il ds^2 della superficie minima $\overline{\Sigma}$ potrà scriversi

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2).$$

Conviene anche trascrivere le formole relative ai coseni di direzione del triedro principale (X_1, X_2, X_3), e cioè:

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v} X_2 - e^{-\theta} X_3 \;, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v} X_1 \;, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = e^{-\theta} X_1 \\
&\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u} X_2 \;, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u} X_1 + e^{-\theta} X_3 \;, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -e^{-\theta} X_2 \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Ed ora riportiamo dal § 351 delle *Lezioni* (vol. II) le formole di trasformazione per le superficie minime scritte sotto forma lineare nelle quattro funzioni incognite

$$\lambda \,,\, \mu \,,\, w \,,\, \varphi \,;$$

abbiamo il sistema fondamentale seguente:

$$
(A)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}\mu + (me^{\theta} - e^{-\theta})\, w + me^{-\theta}\varphi \;, \quad \frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}\lambda \,, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial w}{\partial u} = e^{-\theta}\lambda \;, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = e^{\theta}\lambda \\
&\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}\mu \;, \quad \frac{\partial\mu}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda + (me^{\theta} + e^{-\theta})\, w - me^{-\theta}\varphi \,, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial w}{\partial v} = -e^{-\theta}\mu \;, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = e^{\theta}\mu \,,
\end{aligned}
\right.
$$

dove m indica una costante arbitraria. Questo sistema (completamente integrabile) possiede l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2m\varphi w = \text{cost} \,,$$

e, per ottenere una trasformazione D_m della superficie minima Σ, occorre dare un valore nullo alla costante del secondo membro, onde risulta

$$(A^*)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\varphi w \,.$$

Se indichiamo con (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') le coordinate di due punti corrispondenti sopra Σ, Σ', abbiamo (*Lezioni*, loc. cit.):

$$(6)\qquad \xi' = \xi - \frac{1}{mw}(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) \,, \text{ ecc.}$$

mentre i coseni di direzione (X'_3, Y'_3, Z'_3) della normale alla Σ' sono dati da

$$(7)\qquad X'_3 = \frac{1}{m\varphi} \left\{ \lambda X_1 + \mu X_2 + (w - m\varphi) X_3 \right\} , \text{ ecc.}$$

5. Ciò premesso, denotiamo con x, y, z le coordinate di un punto mobile sulla superficie Σ ed avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = r_2 \frac{\partial X_3}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = r_1 \frac{\partial X_3}{\partial v} ,$$

ossia per le (5)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^{-\theta} r_2 X_1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = - e^{-\theta} r_1 X_2 , \tag{8}$$

dove i raggi principali di curvatura soddisferanno alle equazioni di Codazzi

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u}(r_1 - r_2) \quad , \quad \frac{\partial r_2}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v}(r_2 - r_1) . \tag{9}$$

Siano ora x', y', z' le coordinate del punto corrispondente sulla Σ' dedotta dalla Σ con una E_m (n. 3). Siccome la congiungente i punti (x, y, z), (x', y', z') deve essere parallela a quella dei punti (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'), dalle (6) risulta che potremo porre

$$x' = x + \tau(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) \tag{10}$$

colle altre due analoghe, dove rimarrà da determinare τ in modo conveniente. Per questo ci serviamo della condizione che la normale alla Σ' deve avere i coseni di direzione (X'_3, Y'_3, Z'_3), e quindi sussistono le due relazioni

$$SX'_3 \frac{\partial x'}{\partial u} = 0 \quad , \quad SX'_3 \frac{\partial x'}{\partial v} = 0 .$$

Calcolando queste, mediante le (5), le (8) e le (A), si ottiene per τ il sistema lineare del primo ordine:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= -\left(e^{\theta}\frac{\lambda}{\varphi} + e^{-\theta}\frac{\lambda}{w}\right)\tau - \frac{e^{-\theta} r_2}{m}\frac{\lambda}{\varphi w} \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} &= -\left(e^{\theta}\frac{\mu}{\varphi} - e^{-\theta}\frac{\mu}{w}\right)\tau + \frac{e^{-\theta} r_1}{m}\frac{\mu}{\varphi w} . \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Questo è un sistema completamente integrabile, e si ha con una quadratura l'integrale generale dalla formola

$$\varphi w . \tau = C - \frac{1}{m}\int (e^{-\theta} r_2 \lambda du - e^{-\theta} r_1 \mu dv) , \tag{12}$$

con C costante arbitraria, l'espressione sotto il segno $\int$ essendo in effetto un differenziale esatto, a causa delle (A) e delle (9).

Le formole (10) definiscono le superficie Σ' trasformate della Σ per una E_m, dove figurano, oltre m, tre costanti arbitrarie. Si osservi che le normali a Σ, Σ' in punti corrispondenti s'incontrano in un punto (x_0, y_0, z_0), le cui coordinate sono

$$x_0 = x + m\varphi\tau X_3, \tag{13}$$

e queste definiscono la superficie S luogo dei centri delle sfere, colle due falde Σ, Σ' dell'inviluppo. Il raggio R delle sfere è dato da

$$R = m\varphi\tau. \tag{13*}$$

6. Ora passiamo a verificare che questo valore R soddisfa all'equazione (I) n. 2, la quale nel caso attuale diventa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R+r_2}\frac{\partial R}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R+r_1}\frac{\partial R}{\partial v}\right) = e^{-2\theta}.$$

Dalla (13*) derivando, otteniamo per le (A) e per le (II):

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -e^{-\theta}(R+r_2)\frac{\lambda}{w}, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = e^{-\theta}(R+r_1)\frac{\mu}{w},$$

e la precedente diventa

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-\theta}\frac{\mu}{w}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{-\theta}\frac{\lambda}{w}\right) = e^{-2\theta}.$$

Eseguendo le derivazioni colle (A), questa si riduce subito alla (A*) e trovasi quindi verificata.

In modo simile si potrebbe riscontrare, colle precedenti, che $R = m\varphi\tau$ soddisfa anche la (II) n. 2; ma questo segue anche da che sulle due falde Σ, Σ' dell'inviluppo di sfere si corrispondono le linee di curvatura, e per ciò (Nota B) sulla superficie S luogo dei centri il corrispondente sistema (u, v) è coniugato.

Dopo queste verifiche risulta dal n. 2 che la superficie S ammette una deformata per flessione S_0, tale che in S_0 i termini dei segmenti vengono ad avere per luogo un piano π, sicchè quando S_0 rotola sopra S il piano π inviluppa la superficie Σ. Così, in effetto, ad ogni trasformazione E_m della superficie Σ corrisponde una generazione di questa superficie come inviluppo di rotolamento; la superficie S d'appoggio è la superficie luogo dei centri delle sfere e la rotolante S_0 si ha con quadrature.

7. Fra le superficie Σ a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura vi sono le superficie coi due sistemi di linee di curvatura piane, le cui immagini sferiche delle linee di curvatura sono due fasci ortogonali di circoli. Però noi qui considereremo solo il caso generale quando le due rette, coniugate rispetto alla sfera, che sono gli assi dei due fasci di piani dei

circoli non sono tangenti alla sfera e non passano per il centro. In questo caso Eisenhart ha dimostrato (n. 8, m. c.) che, se si prende $= \frac{1}{2}$ la costante della trasformazione E_m, questa può applicarsi in guisa che anche la trasformata Σ' abbia linee di curvatura piane, ed allora la superficie S luogo dei centri delle sfere è una *superficie di traslazione* con curve generatrici in piani perpendicolari, e queste curve dànno il sistema coniugato corrispondente alle linee di curvatura di Σ.

È d'altra parte noto (cfr. *Lezioni*, vol. II, § 252) che queste superficie di traslazione ammettono una deformazione continua ad un parametro che conserva coniugato il detto sistema, le curve generatrici mantenendosi in piani perpendicolari; quindi se ne conclude che la superficie rotolante S_0 è appunto una di queste deformate.

Ma noi vogliamo ora invertire queste considerazioni e dimostrare il teorema:

Sopra una superficie S *di traslazione, con curve generatrici in piani perpendicolari, si faccia rotolare una superficie applicabile* S_0 *della medesima classe, che trasporti seco, come piano satellite, un piano* π *ortogonale ad ambedue i sistemi di piani delle curve di traslazione di* S_0. *Questo piano* π *inviluppa una superficie* Σ *coi due sistemi di linee di curvatura piane.*

In questo modo si ottiene, come inviluppo di rotolamento, qualunque superficie a linee di curvatura piane della classe generale sopra indicata.

8. Alla dimostrazione del teorema enunciato premettiamo la deduzione di alcune formole più generali, che tornano utili in altre ricerche. Consideriamo una superficie S_0, pel momento arbitraria, ed i segmenti rettilinei calati dai punti di S_0 normalmente sopra un piano fisso π, che prendiamo per piano xy; e questi segmenti si pensino invariabilmente collegati alla S_0 nelle sue flessioni. Se la S_0 assume, deformandosi, la configurazione S, il luogo dei termini dei detti segmenti diventerà una superficie Σ, ortogonale ai segmenti stessi, e noi vogliamo calcolare gli elementi relativi alla congruenza delle normali di Σ.

Come nella mia prima Memoria sul rotolamento ([1]), scriviamo le equazioni parametriche di S_0 sotto la forma ordinaria

$$x_0 = u \quad , \quad y_0 = v \quad , \quad z_0 = z_0(u, v) \, ,$$

e facciamo uso delle notazioni di Monge

$$p = \frac{\partial z_0}{\partial u} \quad , \quad q = \frac{\partial z_0}{\partial v} \quad , \quad r = \frac{\partial^2 z_0}{\partial u^2} \quad , \quad s = \frac{\partial^2 z_0}{\partial u \, \partial u} \quad , \quad t = \frac{\partial^2 z_0}{\partial v^2}$$

([1]) *Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVIII, an. 1914).

per le derivate prime e seconde di z_0. I coefficienti E_0, F_0, G_0 ; D_0, D'_0, D''_0 delle due forme fondamentali di S_0 in coordinate u, v saranno:

$$E_0 = 1 + p^2 \quad , \quad F_0 = pq \quad , \quad G_0 = 1 + q^2$$

$$D_0 = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad D'_0 = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad D''_0 = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Per la deformata S i coefficienti della prima forma restano gli stessi E_0, F_0, G_0, e quelli della seconda si indicheranno con D, D', D''.

Ora i coseni di direzione α, β, γ dei raggi della congruenza delle normali a Σ, nella configurazione S, sono dati dalle formole (**M.** c., § 3)

$$\alpha = \frac{p}{1+p^2+q^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{q}{1+p^2+q^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{X}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

colle analoghe per β, γ avendo indicato con x, y, z le coordinate di un punto mobile su S, con X, Y, Z i coseni di direzione della normale.

Dal calcolo eseguito al § 21 della Memoria ora citata, introducendo i coefficienti delle due forme fondamentali della congruenza:

$$\begin{cases} E' = S\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad F' = S\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} \quad , \quad G' = S\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 \\ e = S\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad f = S\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} \quad , \quad f' = S\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad g = S\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

risultano i valori seguenti:

$$(15) \quad \begin{cases} E' = \Delta^2 + \Delta'^2 \quad , \quad F' = \Delta'(\Delta + \Delta'') \quad , \quad G' = \Delta'^2 + \Delta''^2 \\ e = -\Delta \quad , \quad f = f' = -\Delta' \quad , \quad g = -\Delta'' . \end{cases}$$

dove abbiamo posto per brevità

$$(16) \quad \Delta = \frac{D - D_0}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad \Delta' = \frac{D' - D'_0}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad \Delta'' = \frac{D'' - D''_0}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Di qui, formando l'equazione differenziale delle sviluppabili della congruenza, e sopprimendo il fattore non nullo $\Delta\Delta'' - \Delta'^2$, troviamo

$$(17) \qquad \Delta' du^2 + (\Delta'' - \Delta)\, du\, dv - \Delta' dv^2 = 0 .$$

Ora supponiamo che la superficie S_0 sia una superficie di traslazione, colle curve generatrici in piani paralleli ai piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, onde sarà $D'_0 = 0$, cioè $s = 0$. Supponiamo di più che anche la S sia di traslazione colle curve generatrici $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$, ed avremo anche $D' = 0$, e per ciò $\Delta' = 0$. Allora la (17) dimostra che le sviluppabili della congruenza sono le $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$, cioè a dire: *al sistema coniugato comune di* (S, S_0) *corrisponde sopra* Σ *il sistema delle linee di curvatura.*

Proviamo che queste sono curve piane, verificando che le loro immagini sferiche sono circoli. Dalle (15) abbiamo pel ds'^2 sferico

$$ds'^2 = \Delta^2 du^2 + \Delta''^2 dv^2 ,$$

e se denotiamo con $\frac{1}{\varrho'_u}$, $\frac{1}{\varrho'_v}$ le curvature geodetiche delle linee sferiche $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ valgono le formole

$$-\frac{1}{\varrho'_u} = \frac{1}{\Delta\Delta''}\frac{\partial\Delta''}{\partial u} \quad , \quad -\frac{1}{\varrho'_v} = \frac{1}{\Delta\Delta''}\frac{\partial\Delta}{\partial v} .$$

Ma in generale dalle equazioni di Codazzi e di Gauss risultano le seguenti:

$$(18) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Delta'}{\partial u} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial v} = \dfrac{q}{1+p^2+q^2}(t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta'') \\[2ex] \dfrac{\partial\Delta'}{\partial v} - \dfrac{\partial\Delta''}{\partial u} = \dfrac{p}{1+p^2+q^2}(t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta'') \\[2ex] \Delta\Delta'' - \Delta'^2 = -\dfrac{t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta''}{1+p^2+q^2} . \end{cases}$$

Applicandole al caso attuale ove $\Delta' = 0$, ne risulta

$$\frac{1}{\varrho'_u} = -p \quad , \quad \frac{1}{\varrho'_v} = -q ,$$

quindi $\frac{1}{\varrho'_u}$ è funzione di u soltanto, $\frac{1}{\varrho'_v}$ di v soltanto cioè le linee $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ sono circoli. c. d. d.

9. Terminiamo col dare, in termini finiti, le equazioni delle due superficie applicabili di traslazione S_0, S e quelle della superficie Σ a linee di curvatura piane come inviluppo di rotolamento.

Scriviamo prima le equazioni parametriche della S_0:

$$S_0) \qquad x_0 = u \quad , \quad y_0 = v \quad , \quad z_0 = \varphi(u) + \psi(v) ,$$

con $\varphi(u)$, $\psi(v)$ rispettive funzioni arbitrarie, la prima di u, la seconda di v. Quelle della superficie applicabile S della medesima classe, dipendenti da una costante arbitraria k, saranno:

$$S) \quad x = \int\sqrt{1 + (1 - k^2)\varphi'^2(u)}du \quad , \quad y = \int\sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\psi'^2(v)}\,dv ,$$

$$z = k\varphi(u) + \frac{\psi(v)}{k} ,$$

$$\left(\varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du} \quad , \quad \varphi'(v) = \frac{d\psi}{dv}\right) .$$

Calcolando di qui, secondo le (14), i coseni α, β, γ, ove si ponga per brevità:

$$\sqrt{1+(1-k^2)\varphi'^2(u)} = \mathrm{U} \quad , \quad \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\psi'^2(v)} = \mathrm{V} ,$$

troviamo:

$$\alpha = \frac{\varphi'(u)(\mathrm{U}-k\mathrm{V})}{1+\varphi'^2(u)+\psi'^2(v)} \quad , \quad \beta = \frac{\psi'(v)\left(\mathrm{V}-\dfrac{\mathrm{U}}{k}\right)}{1+\varphi'^2(u)+\psi'^2(v)} \tag{18}$$

$$\gamma = \frac{k\varphi'^2(u) + \dfrac{\psi'^2(v)}{k} + \mathrm{UV}}{1+\varphi'^2(u)+\varphi'^2(v)} .$$

Da queste formole seguono le altre

$$\left\{\begin{aligned} & \mathrm{U}\alpha + \varphi'(u)(k\gamma - 1) = 0 \\ & \mathrm{V}\beta + \frac{\psi'(v)}{k}(\gamma - k) = 0 \end{aligned}\right.$$

le quali dimostrano che le linee sferiche $u = \mathrm{cost}$ sono circoli i cui piani passano per la retta

$$x = 0 \quad , \quad z = \frac{1}{k} ,$$

e le $v = \mathrm{cost}$ circoli nei piani per la retta

$$y = 0 \quad , \quad z = k ;$$

queste due rette sono polari reciproche rispetto alla sfera (non tangenti).

Quanto alle coordinate ξ, η, ζ di un punto della superficie Σ a linee di curvatura piane u, v considerata come inviluppo di rotolamento, sono date dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \int \sqrt{1+(1-k^2)\varphi'^2(u)}\, du - [\varphi(u)+\psi(v)]\,\alpha \\ \eta &= \int \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\varphi'^2(v)}\, dv - [\varphi(u)+\psi(v)]\,\beta \\ \zeta &= k\varphi(u) + \frac{\psi(v)}{k} - [\varphi(u)+\psi(v)]\,\gamma . \end{aligned}\right. \tag{19}$$

avendo α, β, γ i valori (18).

Il teorema enunciato alla fine del n. 7 è così dimostrato. Osserviamo da ultimo il caso particolare notevole che la superficie S_0 di traslazione sia il paraboloide rotondo, col piano direttore come piano satellite: *Se il paraboloide rotondo rotola sopra una delle sue ∞^1 superficie di traslazione applicabili, il piano direttore inviluppa la più generale superficie minima a linee di curvatura piane* (esclusa la superficie minima d'Enneper ed il catanoide).