

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota III del Socio VITO VOLTERRA.

35. Passiamo a dare la soluzione del problema nel caso in cui gli elettrodi, supposti di resistenza trascurabile, costituiscano delle porzioni del contorno. Ritorniamo quindi alle condizioni esaminate nel § 3.

Supponiamo che si sia potuto rappresentare conformemente l'area σ , semplicemente connessa (fig. 3), entro un parallelogrammo $abcd$ nel piano ξ, η in modo tale che sia

$$\widehat{bad} = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

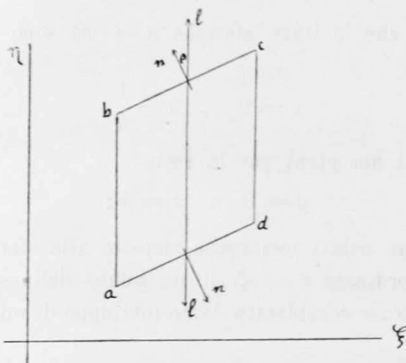


FIG. 18.

Supponiamo, inoltre, che i lati ab e cd siano paralleli all'asse η , e che i tratti dei contorni ab e AB , bc e BC , cd e CD , da e DA si corrispondono rispettivamente.

Prendiamo la funzione

$$V = M\xi + N,$$

ove M ed N denotano due costanti, e consideriamo V come funzione di ξ e η . Essa sarà costante lungo i lati ab e cd , e lungo bc e ad avremo

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0.$$

È facile riconoscere che lungo bc e cd le direzioni η e $-\eta$ sono rispet-

tivamente inclinate dell'angolo β rispetto alla normale esterna n ai lati stessi.

Consideriamo ora ξ come funzione di x e y , e riportiamo la funzione V sopra l'area σ nel piano x, y . Essa risulterà armonica e regolare, sarà costante sopra le porzioni del contorno AB e CD, mentre lungo le porzioni BC e AD, avremo

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0.$$

Servendoci dell'arbitrarietà delle costanti M ed N , potremo ridurre i valori di V eguali ai valori dati lungo AB e CD, e perciò V sarà il potenziale richiesto. È facile riconoscere l'ordine di infinito delle derivate di ξ rispetto a x e y nei punti angolosi del contorno.

36. Supponiamo che σ sia un quadrato. Cominciamo dal prendere sull'asse reale del piano complesso z due punti a e $-a$, e poniamo

$$(13) \quad Z = \int_0^z (a^2 - z^2)^{\nu-1} dz$$

$$(13') \quad Z_1 = \int_0^z (a^2 - z^2)^{\mu-1} dz.$$

Mentre z si muove nel semipiano corrispondente al coefficiente dell'immaginario positivo, Z e Z_1 si muovono rispettivamente entro due triangoli

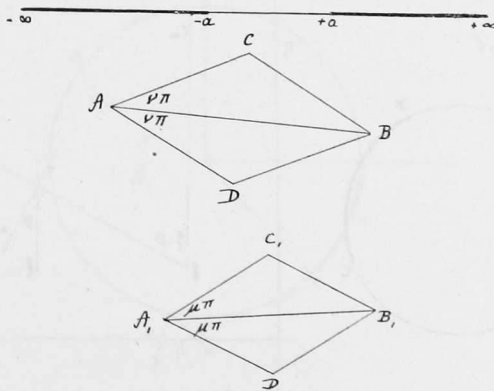


FIG. 19.

isosceli ABC e $A_1B_1C_1$ i cui angoli alla base hanno rispettivamente le aperture $\nu\pi$ e $\mu\pi$. Applicando quindi il principio di simmetria, mentre z percorre tutto il suo piano sezionato con due tagli $-a - \infty$ e $+a + \infty$ Z e Z_1 si muovono rispettivamente nei rombi $ACBD$ e $A_1C_1B_1D_1$.

Prendendo $\nu = \frac{1}{4}$ il primo rombo diventa un quadrato, e prendendo

$$\mu = \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2\pi}$$

il secondo rombo diviene un parallelogrammo avente un angolo eguale a $\frac{\pi}{2} - \beta$. Per mezzo di una rotazione

$$Z'_1 = Z_1 e^{i(\frac{1}{2} - \mu)\pi}$$

si riduce il secondo rombo ad avere una coppia di lati paralleli ad un asse, e perciò ci mettiamo nelle condizioni della figura 18 ed otteniamo la rappresentazione conforme del quadrato nel parallelogrammo, che ci risolve il problema di *determinare il potenziale e la distribuzione delle correnti in una lamina quadrata soggetta ad un campo magnetico, allorchè due lati opposti sono i due elettrodi di resistenza nulla da cui entra ed esce la corrente, gli altri due lati sono liberi ed isolati.*

È ovvio che avendo preso $\nu = \frac{1}{4}$, l'integrale (13) è ellittico, ed infatti ponendo $a^2 - s^2 = x^4$, e $a = 1$, si ha

$$Z = \int_0^z \frac{ds}{(a^2 - s^2)^{\frac{3}{4}}} = -2 \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

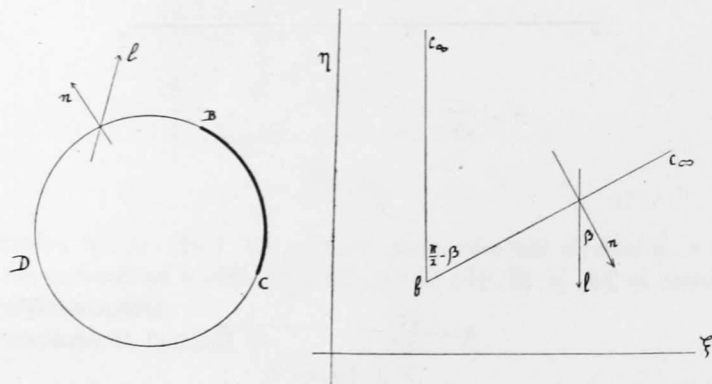


FIG. 20.

37. Esaminiamo ora il caso considerato nel § 6, e supponiamo che la lamina sia circolare. Tutta la questione si riduce a costruire una funzione armonica regolare W di cui si conosce il valore lungo l'arco BC, mentre si conosce il valore di $\frac{dW}{dl}$ lungo l'arco CDB.

Rappresentiamo conformemente il cerchio entro un angolo di apertura $\frac{\pi}{2} - \beta$ nel piano $\xi\eta$ (fig. 20), in modo che il lato bc_∞ parallelo ad η corrisponda all'arco BC, ed il lato inclinato bc_∞ corrisponda all'arco BDC il vertice B corrisponda a B e il punto c_∞ all'infinito al punto C. Riportiamo nell'angolo i valori di W. Allora $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ sarà nota sopra i due lati dell'angolo, e poichè è armonica, potremo calcolare $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ internamente all'angolo, d'onde si ricaverà W.

È evidente che si giungerebbe allo stesso risultato se un lato dell'angolo fosse parallelo a ξ e corrispondesse all'arco BC, e l'altro lato inclinato corrispondesse all'arco BDC e si considerasse il $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ anzichè il $\frac{\partial W}{\partial \eta}$.

Ma per trattare questo caso, che svolgeremo nei §§ seguenti, è utile impiegare le funzioni di variabili complesse introdotte alla fine del § 14. È specialmente interessante esaminare la questione quando $\beta = \frac{n-2}{n}\pi$, giacchè mediante una opportuna rappresentazione conforme e quindi l'applicazione del doppio principio delle immagini considerato (§ 18) si giunge alla soluzione in modo molto semplice.

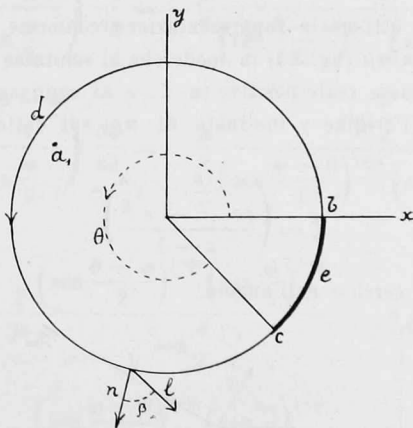


FIG. 21.

38. Mediante la funzione

$$Z = \frac{ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z - 1}$$

si rappresenta (fig. 21) l'area interna ad un cerchio di raggio 1, col centro

all'origine, situato nel piano z , nel semipiano $Z = X + iY$ (fig. 22) corrispondente ai valori positivi di Y . Se consideriamo i punti del contorno del cerchio aventi per indice $z = e^{i\omega}$ si trova per Z

$$Z = \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}$$

quindi corrispondono ai punti dell'asse reale nel piano Z , ed in particolare a $0 < \omega < \theta$ corrisponde il semiasse reale negativo, e a $\theta < \omega < 2\pi$ corrisponde il semiasse reale positivo.

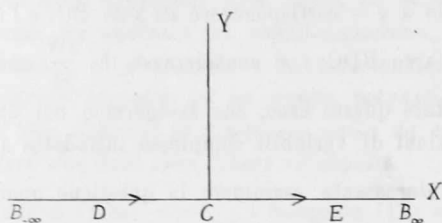


FIG. 22.

Supposto

$$0 < \mu < 1.$$

e posto $\zeta = Z^\mu$ si ottiene la rappresentazione conforme del semipiano nell'angolo di apertura $\pi\mu$ (fig. 23) in modo che al semiasse reale positivo in Z corrisponde il semiasse reale positivo in ζ , e al semiasse reale negativo il raggio spiccato dall'origine γ inclinato di $\pi\mu$ sul detto semiasse positivo, ossia mediante

$$(14) \quad \zeta = \left(\frac{ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z - 1} \right)^\mu$$

rappresenteremo il cerchio nell'angolo.

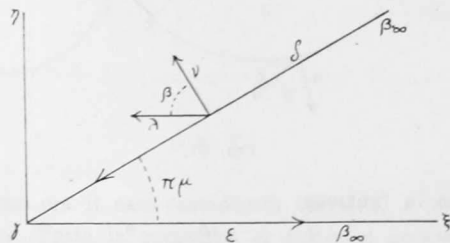


FIG. 23.

Posto

$$z = r e^{i\omega} \quad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\varphi}$$

per $0 < \omega < \theta$, $r = 1$, avremo

$$\zeta = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^\mu e^{i\mu\pi}, \quad \text{cioè } \varrho = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^\mu, \quad \varphi = \mu\pi$$

per $\theta < \omega < 2\pi$, $r = 1$, avremo

$$\zeta = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^\mu, \quad \text{cioè } \xi = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^\mu, \quad \eta = 0.$$

Derivando le relazioni

$$\varrho = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^\mu, \quad \xi = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^\mu$$

rispettivamente rapporto a ϱ e a ξ , si trova

$$1 = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^\mu \frac{d\omega}{d\varrho} = -\frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}} \frac{d\omega}{d\varrho}$$

$$1 = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^\mu \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}} \frac{d\omega}{d\xi},$$

d'onde

$$(15) \quad \frac{d\omega}{d\varrho} = -\frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \omega < \theta$$

$$(15') \quad \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \quad \theta < \omega < 2\pi.$$

Abbiassi ora la funzione $w(z) = u + iv$ regolare entro il cerchio e al contorno di esso. Consideriamela z come funzione di ζ invertendo la (14), e sostituiamo nella precedente funzione, otterremo

$$w(z(\zeta)) = w_1(\zeta)$$

che sarà regolare nell'interno e al contorno dell'angolo. Calcoliamo

$$(16) \quad u_2 + i v_2 = w_2(\zeta) = \frac{dw_1}{d\zeta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Per far ciò supponiamo noti i valori di u lungo l'arco ceb in funzione di ω . Denotiamoli con $L(\omega)$ e formiamo la loro derivata rispetto ad ω che indicheremo con $L'(\omega)$.

Sia poi l una direzione inclinata dell'angolo $\beta = \frac{\pi}{2} - \pi\mu$ sulla normale esterna n al cerchio, e formiamo $\frac{\partial u}{\partial l}$ che indicheremo con $M(\omega)$. Ciò posto avremo lungo il semiasse ξ positivo $\gamma\delta\beta_\infty$ in virtù della (15')

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\xi} = L'(\omega) \frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}},$$

e lungo il lato $\gamma\delta\beta_\infty$ se λ è inclinata di β rispetto alla normale v

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} = - \frac{\partial u}{\partial \lambda} = - \frac{\partial u}{\partial \omega} \left(- \frac{d\omega}{d\varrho}\right) = - M(\omega) \frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.$$

Se nella (16) sostituiamo a ζ il valore (14), otterremo

$$w_2(\zeta(z)) = u_2(x, y) + i v_2(x, y)$$

e u_2 lungo l'arco bdc sarà

$$- \frac{2}{\mu} M(\omega) \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}},$$

e lungo l'arco ceb sarà

$$\frac{2}{\mu} L'(\omega) \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\omega - \theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.$$

Dunque noi conosciamo al contorno del cerchio i valori della parte reale u_2 della funzione $w_2(\zeta(z))$. Ci sarà per conseguenza facile, applicando una formula ben nota, calcolare w_2 entro il cerchio. La formula che impiegheremo sarà

$$w_2(\zeta(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(\omega) \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\omega + iC,$$

ove con $u_2(\omega)$ si sono denotati i valori di u_2 al contorno del cerchio, e C è una costante reale.

Resulterà quindi, poichè per $z=1$ deve aversi $w_2=0$,

$$w_2(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi\mu} \int_0^\theta M(\omega) \frac{\left(\text{sen} \frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\text{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\text{sen} \frac{\theta}{2}} \left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z} - \frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right) d\omega$$

$$+ \frac{1}{\pi\mu} \int_\theta^{2\pi} L'(\omega) \frac{\left(\text{sen} \frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\text{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\text{sen} \frac{\theta}{2}} \left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z} - \frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right) d\omega.$$

Ma dalla (14) segue

$$\frac{d\zeta}{dz} = 2\mu i e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)} \frac{\text{sen} \frac{\theta}{2}}{(z - e^{i\theta})^{1-\mu} (z - 1)^{1+\mu}},$$

per conseguenza con operazioni semplici potremo calcolare

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = w_2(\zeta(z)) \frac{d\zeta}{dz},$$

ed otterremo

$$(17) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)}}{(z - e^{i\theta})^{1-\mu} (z - 1)^{1+\mu}} \left\{ \int_0^\theta M(\omega) \frac{\left(\text{sen} \frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\text{sen} \frac{\omega}{2}\right)^\mu e^{i\frac{\omega}{2}}}{z - e^{i\omega}} d\omega \right.$$

$$\left. - \int_\theta^{2\pi} L'(\omega) \frac{\left(\text{sen} \frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\text{sen} \frac{\omega}{2}\right)^\mu e^{i\frac{\omega}{2}}}{z - e^{i\omega}} d\omega \right\}.$$

Con una quadratura calcoleremo quindi w a meno di una costante, e separando la parte reale dalla parte immaginaria si avrà la funzione armonica u a meno di una costante che si determinerà facilmente.

Dunque, se lungo l'arco bdc conosciamo $\frac{\partial u}{\partial l}$, e lungo l'arco ceb conosciamo u , potremo ricavare la funzione armonica u entro il cerchio.

Da quanto è stato stabilito nel § 6 si vede che il problema della distribuzione delle correnti in una lamina circolare, allorchè la corrente entra da uno (o anche da più) elettrodi puntiformi interni ed esce da un elettrodo costituito da un arco del contorno di resistenza trascurabile, è completamente risolvibile applicando le formole precedenti.

La quadratura da eseguirsi per ricavare w dalla (17) si calcola facilmente allorchè $\mu = \frac{1}{n}$, essendo n un numero intero. Ma in questo caso il metodo delle immagini ci conduce, come vedremo nel paragrafo seguente, molto più facilmente alla soluzione.

39. Sia α_1 un punto interno all'angolo $\delta\gamma\varepsilon$ che supporremo di ampiezza $\pi\mu = \frac{\pi}{n}$, essendo n un numero intero.

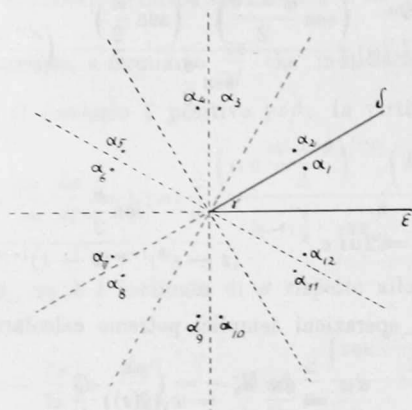


FIG. 24.

Completiamo la divisione dello spazio in angoli tutti eguali a $\frac{\pi}{n}$, e specchiamo il punto α_1 nei diversi raggi ottenendo i punti $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ⁽¹⁾. Formiamo quindi le due funzioni della variabile complessa ζ

$$(18) \quad \Phi = \sum_{h=1}^n e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[\log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right]$$

$$(18') \quad F = \sum_{h=1}^n e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right],$$

le quali sono legate dalla relazione

$$(18'') \quad F = e^{\frac{\pi i}{n}} \Phi$$

e studiamone le proprietà. È facile riconoscere che ciascun termine non cambia mutando h in $h + n$. Infatti

$$\alpha_h = \alpha_{h+2n},$$

(1) Nella figura 24 abbiamo preso $n = 6$, $\beta = 60^\circ$. Osserviamo che il minimo valore di n è 2, nel qual caso si ha $\beta = 0$.

giacchè dopo $2n$ riflessioni le immagini si riproducono, ed inoltre abbiamo

$$e^{-\frac{2(h+n-1)\pi i}{n}} = e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}}.$$

Potremo dunque in qualsiasi termine sostituire h' ad h , senza alterarlo, purchè sia

$$h' \equiv h \pmod{n}.$$

Ciò posto α_{2h-1} e α_{2k} sono immagini l'uno dell'altro rispetto al raggio $\gamma\epsilon$ quando

$$2h - 1 + 2k = 2n + 1,$$

e α_{2h-1} e α_{2k} , sono immagini l'uno dell'altro rispetto al raggio $\gamma\delta$ quando

$$2h - 1 + 2k' = 2n + 3.$$

Dalle equazioni precedenti si ricava

$$k = n - h + 1, \quad k' = n - h + 2.$$

Prendiamo ora i due termini seguenti della somma (18)

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}),$$

$$- e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}) = - e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}).$$

La loro somma sarà

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}),$$

ed essa avrà costante la parte reale sul raggio $\gamma\epsilon$ (cfr. § 19).

Dunque i termini di Φ possono accoppiarsi in modo che la parte reale della somma di ciascuna coppia è costante lungo $\gamma\epsilon$. Ne segue che su questo raggio la parte reale di Φ è costante.

Consideriamo i due termini della somma (18')

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}),$$

$$- e^{-\frac{2(h'-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}) = e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}).$$

La loro somma sarà

$$e^{-\frac{(2h-3)\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{(2h-3)\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}),$$

la cui parte reale è costante lungo il raggio $\gamma\delta$; dunque i termini di F possono accoppiarsi fra loro in modo che la parte reale della somma di ciascuna coppia è costante lungo $\gamma\delta$. Quindi anche F avrà la parte reale costante su questo raggio.

Prendiamo ora

$$(19) \quad \varphi = -\frac{J}{2\pi K} \Phi$$

$$(19') \quad f = -\frac{J}{2\pi K i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} F.$$

È evidente che φ avrà la parte reale costante sul raggio $\gamma\varepsilon$, e f avrà la parte immaginaria costante sul raggio $\gamma\delta$, ossia la derivata normale della parte reale di f sarà nulla su $\gamma\delta$. Ma si riconosce facilmente in virtù della (18'') che

$$f = \frac{e^{-i\beta}}{\cos \beta} \varphi$$

quando si prenda $\beta = \frac{n-2}{2n} \pi$. Dunque, se assumiamo la parte reale di φ come potenziale elettrico, la parte reale di f sarà la corrispondente funzione fondamentale (§ 14). Separiamo in f e φ la parte reale dalla parte immaginaria scrivendo

$$\varphi = V + iV' \quad , \quad f = U + iU' ,$$

avremo allora, che V e U sono rispettivamente il potenziale elettrico, e la funzione fondamentale relativi alla distribuzione delle correnti lungo una lamina indefinita limitata dai raggi $\gamma\varepsilon$ e $\gamma\delta$, quando la corrente di intensità J entri dal polo α_1 ed esca da un elettrodo indefinito di resistenza trascurabile disposto lungo il lato $\gamma\varepsilon$, mentre $\gamma\delta$ è libero ed isolato, nella ipotesi che la lamina sia soggetta all'azione del campo magnetico, e l'angolo β sia

$$\left(\frac{n-2}{2n}\right) \pi .$$

40. Poniamo ora in (19) e (19') (cfr. formula (14))

$$\zeta = \left(\frac{z e^{-i\frac{\beta}{2}} - e^{i\frac{\beta}{2}}}{z - 1} \right)^{\frac{1}{n}} .$$

otterremo la rappresentazione conforme dell'angolo $\epsilon\gamma\delta$ (fig. 24) nel cerchio (fig. 21) ed al punto α_1 corrisponderà il punto a_1 interno al cerchio, tale che

$$\left(\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1} \right)^{\frac{1}{n}} = \alpha_1.$$

Ne segue che i numeri complessi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-1}$ saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}},$$

mentre le $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$ saranno i loro coniugati, cioè chiamando a'_1 il numero complesso coniugato di a_1 saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{a'_1 e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{a'_1 - 1}}.$$

Avremo dunque:

$$\text{Se } \beta = \frac{n-2}{2n} \pi, \text{ e}$$

$$\zeta = \left(\frac{z e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z - 1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

e se le α_{2h-1} e le α_{2h} denotano rispettivamente gli n valori delle radici

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}}, \quad \sqrt[n]{\frac{a'_1 e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{a'_1 - 1}}$$

(essendo a'_1 il coniugato di a_1), le parti reali di

$$\varphi = -\frac{J}{2\pi K} \sum_1^n e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[\log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right]$$

$$f = -\frac{J}{2\pi K i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \sum_1^n e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right]$$

sono rispettivamente il potenziale elettrico e la funzione fondamentale di una distribuzione di correnti entro il cerchio di raggio 1 (fig. 21), allorchè la corrente entra dall'elettrodo puntiforme interno a_1 ed esce

dall'elettrodo di resistenza trascurabile *bec*, mentre la porzione *bdc* del contorno è libera ed isolata, nella ipotesi che la lamina circolare sia soggetta all'azione del campo magnetico.

41. Supponiamo adesso che l'elettrodo puntiforme a_1 vada al contorno in un punto dell'arco *bdc*, avremo allora

$$\alpha_{2h-1} = \alpha_{2h}$$

e, posto $a_1 = e^{i\omega}$ con $\omega < \theta$, queste quantità saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{e^{i\omega} - i\frac{\theta}{2} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\omega} - 1}},$$

ossia gli n valori di

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}$$

per $h = 1, 2, \dots, n$, e quindi avremo

$$f = -\frac{J}{\pi K} \sum_{h=1}^n e^{-\frac{(2h-1)\pi i}{n}} \log \left(\zeta - \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}} \right)$$

$$g = -i \frac{J \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\pi K} \sum_{h=1}^n e^{-\frac{(2h-1)\pi i}{n}} \log \left(\zeta - \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}} \right).$$

ove per $\sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}}$ va preso il valore positivo e si deve sempre supporre

di sostituire a ζ l'espressione

$$\zeta = \left(\frac{ze^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z - 1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

ERRATA CORRIGE ALLA NOTA II

Pag. 294, linea 21 *dopo le parole*: in cui manchi il campo magnetico *aggiungere*: se non per un fattore costante di proporzionalità eguale al rapporto delle conducibilità.

Pag. 301, linea 1^a e 2^a *invece di*: nel campo *sostituire*: alla lamina.

Pag. 301 linea 2^a *dopo le parole*: il potenziale elettrico *aggiungere*: (senza campo magnetico, ma ridotto nel rapporto tra le conducibilità della lamina, prima e dopo l'azione del campo stesso).