ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Elemento accessorio caratteristico è il granato di color giallo-chiaro, in granuli tondeggianti piuttosto che in netti cristalli. L'epidoto è in rari granuli, quasi incolori.

Infine gli ossidi di ferro, in gran parte ilmenite, si trovano in quantità assai variabile da campione a campione.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota VI: *Il fenomeno dell'addizione di due contrazioni successive indagato nel preparato diaframmatico*, del Corrispondente F. BOTTAZZI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Su di una reciprocità tra deformazioni e distorsioni.* Nota di G. COLONNETTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

In una classica serie di Memorie sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi, il prof. Volterra ha dimostrato la possibilità di creare, in essi, degli stati di equilibrio differenti dallo stato naturale, senza l'intervento di alcuna forza esterna, mediante certe operazioni a cui Egli ha dato il nome di *distorsioni* (1).

È noto che tra i due sistemi di sforzi generati da due dati sistemi di distorsioni sussiste una reciprocità affatto analoga a quella che il Betti ha stabilita fra i due sistemi di spostamenti che derivano da due dati sistemi di forze esterne (2).

Io mi propongo qui di dimostrare che una reciprocità esiste pure fra il sistema delle tensioni interne prodotte da una data sollecitazione esterna ed il sistema degli spostamenti che nello stesso corpo elastico vengono determinati da una data distorsione.

(1) V. Volterra, *Un teorema sulla teoria della elasticità* (Rend. R. Accademia dei Lincei, 5ª serie, vol. XIV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (ibid., (5ª serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi* (ibid., 5ª serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici* (ibid., 5ª serie, vol. XIV); *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici* (ibid., 5ª serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi* (ibid., 5ª serie. vol. XIV); *Nuovi studii sulle distorsioni dei solidi elastici* (ibid., 5ª serie, vol. XV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (Il nuovo Cimento, 5ª serie, vol. X e XI); *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes* (Ann. éc. norm., 3, tom. XXIV).

(2) Cfr. ad es. V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes* (Ann. éc. norm., 3, tom. XXIV) a pag. 432 e seg.

Sia S lo spazio, connesso — in generale, anzi, a connessione multipla, — occupato da un corpo elastico in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne. Indicheremo con Σ la superficie, chiusa, che lo limita, e con σ un diaframma arbitrariamente tracciato attraverso quello spazio, cioè una superficie contenuta tutta entro S, la quale non seghi se stessa ed abbia il suo contorno su Σ.

Se si immagina, lungo quel diaframma, operato un taglio nel corpo elastico dato, il primitivo stato di equilibrio di questo si può conservare, dopo il taglio, immutato se si immaginano applicate alle due faccie del taglio due distribuzioni di forze, ovunque equivalenti alle tensioni interne che nel corpo dato inizialmente si trasmettevano attraverso la superficie σ.

Detto φ il potenziale elastico unitario, ed indicate con

$$X\,,\,Y\,,\,Z$$

le componenti secondo tre assi coordinati della forza esterna applicata all'elemento generico di volume dS, riferite all'unità di volume, e con

$$X_n\,,\,Y_n\,,\,Z_n$$

le analoghe componenti, riferite all'unità di area, della pressione applicata all'elemento generico di normale n delle superfici Σ e σ, le condizioni di equilibrio si riassumono notoriamente nella relazione

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &\int_S \delta\varphi\,.\,dS + \int_S (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\,dS + \\ &+ \int_\Sigma (X_n\delta u + Y_n\delta v + Z_n\delta w)\,d\Sigma + \\ &+ \int_\sigma [X_n(\delta u_\alpha - \delta u_\beta) + Y_n(\delta v_\alpha - \delta v_\beta) + Z_n(\delta w_\alpha - \delta w_\beta)]\,d\sigma \end{aligned}\right.$$

nella quale

$$\delta u\,,\,\delta v\,,\,\delta w$$

stanno a denotare le componenti, secondo gli stessi assi, dello spostamento di un punto generico di S o di Σ *in una qualsiasi deformazione possibile del corpo elastico* TAGLIATO;

$$\delta u_\alpha\,,\,\delta v_\alpha\,,\,\delta w_\alpha$$

e

$$\delta u_\beta\,,\,\delta v_\beta\,,\,\delta w_\beta$$

essendo i valori di

$$\delta u\;\;,\,\delta v\;\;,\,\delta w$$

relativi ad un punto generico di σ considerato come appartenente rispettivamente all'una ovvero all'altra faccia del taglio. Più precisamente, assunta al solito come positiva la direzione della normale a Σ che è rivolta verso l'interno di S, si dovranno intendere contraddistinte coll'indice α le componenti dello spostamento di un punto di σ se lo si considera come appartenente a quella faccia del taglio rispetto a cui la normale a σ entra in S, e coll'indice β quelle relative allo stesso punto considerato come appartenente all'altra faccia del taglio rispetto a cui la normale a σ esce da S.

Noi supporremo che il moto relativo delle due faccie del taglio sia un semplice moto rigido nello spazio: cioè che

$$\begin{aligned} \delta u_\alpha - \delta u_\beta &= l' + q'z - r'y \\ \delta v_\alpha - \delta v_\beta &= m' + r'x - p'z \\ \delta w_\alpha - \delta w_\beta &= n' + p'y - q'x. \end{aligned}$$

con l', m', n', p', q', r', costanti.

La variazione di configurazione che il corpo elastico subisce è allora, in generale, una distorsione di Volterra, di cui

$$l', m', n', p', q', r'$$

sono le caratteristiche. Fa eccezione soltanto il caso in cui, per opera del taglio praticato secondo σ, lo spazio S avesse cessato di essere connesso: in questo caso il fenomeno si riduce ovviamente ad un semplice spostamento rigido di una delle due porzioni in cui il corpo è rimasto diviso rispetto all'altra.

Comunque stiano le cose, dette

$$u', v', w'$$

le componenti dello spostamento così determinato in un punto generico di S o di Σ, e posto, al solito,

$$\begin{aligned} x'_x &= \frac{\partial u'}{\partial x} & y'_z &= \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \\ y'_y &= \frac{\partial v'}{\partial y} & z'_x &= \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \\ z'_z &= \frac{\partial w'}{\partial z} & x'_y &= \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \end{aligned}$$

la (1) si trasforma facilmente nella relazione

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_S (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int_\Sigma (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\, d\Sigma + \\ &+ \int_\sigma [X_n(l' + q'z - r'y) + Y_n(m' + r'x - p'z) + Z_n(n' + p'y - q'x)]\, d\sigma = \\ &= -\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \right) dS \end{aligned} \right.$$

che noi scriveremo sotto la forma

$$(2')\quad\left\{\begin{aligned}&\int_S (Xu'+Yv'+Zw')\,dS+\int_\Sigma (X_n u'+Y_n v'+Z_n w')\,d\Sigma+\\&\qquad+Ll'+Mm'+Nn'+Pp'+Qq'+Rr'=\\&=-\int_S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_x}x'_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y_y}y'_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z_z}z'_z+\frac{\partial\varphi}{\partial y_z}y'_z+\frac{\partial\varphi}{\partial z_x}z'_x+\frac{\partial\varphi}{\partial x_y}x'_y\right)dS\end{aligned}\right.$$

denotando, per brevità, con

$$L=\int_\sigma X_n\,d\sigma\qquad P=\int_\sigma (Z_n y-Y_n z)\,d\sigma$$

$$M=\int_\sigma Y_n\,d\sigma\qquad Q=\int_\sigma (X_n z-Z_n x)\,d\sigma$$

$$N=\int_\sigma Z_n\,d\sigma\;,\qquad R=\int_\sigma (Y_n x-X_n y)\,d\sigma$$

le sei caratteristiche del sistema di tensioni interne relative a σ.

Ora è facile dimostrare che il secondo membro di questa equazione è identicamente nullo.

L'asserto è evidente nel caso in cui le u', v', w' individuano un semplice moto rigido nello spazio, perchè allora si ha, in ogni punto di S,

$$x'_x=y'_y=z'_z=y'_z=z'_x=x'_y=0\,.$$

Nel caso generale, in cui si verifica la distorsione propriamente detta, si può osservare che, per l'equilibrio, deve riescire soddisfatta una equazione del tipo (1) per forze nulle così in S come su Σ, e per variazioni δu, δv, δw, affatto qualunque. Ora se tali variazioni si prendono precisamente eguali agli spostamenti u, v, w che nel sistema elastico dato sono prodotti dal dato sistema di forze esterne, siccome in ogni punto di σ riesce

$$\delta u_\alpha=\delta u_\beta\quad,\quad\delta v_\alpha=\delta v_\beta\quad.\quad\delta w_\alpha=\delta w_\beta$$

quella equazione si riduce a

$$0=\int_S\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_x}x_x+\frac{\partial\varphi'}{\partial y'_y}y_y+\frac{\partial\varphi'}{\partial z'_z}z_z+\frac{\partial\varphi'}{\partial y'_z}y_z+\frac{\partial\varphi'}{\partial z'_x}z_x+\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_y}x_y\right)dS\,,$$

e poichè, per una nota proprietà delle forme quadratiche,

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_x}x_x+\frac{\partial\varphi'}{\partial y'_y}y_y+\frac{\partial\varphi'}{\partial z'_z}z_z+\frac{\partial\varphi'}{\partial y'_z}y_z+\frac{\partial\varphi'}{\partial z'_x}z_x+\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_y}x_y=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x_x}x'_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y_y}y'_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z_z}z'_z+\frac{\partial\varphi}{\partial y_z}y'_z+\frac{\partial\varphi}{\partial z_x}z'_x+\frac{\partial\varphi}{\partial x_y}x'_y$$

se ne conclude che

$$\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \right) dS = 0$$

come si voleva dimostrare.

La (2') assume pertanto la forma caratteristica

$$(3) \quad \begin{cases} \int_S (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int_\Sigma (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\, d\Sigma + \\ \qquad + Ll' + Mm' + Nn' + Pp' + Qq' + Rr' = 0 \end{cases}$$

la quale esprime il teorema:

« La somma dei prodotti delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, per le corrispondenti caratteristiche di una distorsione, è eguale e contraria al lavoro che le forze esterne, applicate al corpo stesso, eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella distorsione darebbe origine ».

Se si introduce il concetto di *distorsione unitaria negativa*, chiamando così ogni distorsione le cui caratteristiche siano tutte nulle, eccezion fatta soltanto per una, a cui si attribuisce il valore fisso —1, si può enunciare il teorema sotto la forma:

« Ciascuna delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne, che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurata dal lavoro che le forze esterne applicate al corpo eseguirebbero qualora su questo si operasse la corrispondente distorsione unitaria negativa »

Così espresso, il teorema non è nuovo: chi scrive aveva già cercato di darne una dimostrazione generale in una breve Nota che ha avuto tre anni or sono l'onore di comparire in questi stessi Rendiconti [1].

E già molti anni prima, il principio, qui espresso nella sua forma più generale, era stato in qualche caso particolare intuito, ed applicato utilmente alla risoluzione di qualche problema di equilibrio iperstatico [2].

In una prossima Nota io mi propongo di precisare la portata di queste applicazioni mettendo in evidenza in qual modo la dimostrata reciprocità fra deformazioni e distorsioni riconnetta alla teoria del Volterra alcuni fra i più importanti capitoli della scienza delle costruzioni.

[1] G. Colonnetti, *Sul principio di reciprocità* (Rend. R. Accademia dei Lincei, 5ª serie, vol. XXI); cfr. anche: *Introduzione teorica ad un corso di statica dei corpi elastici* (lez. litogr., Genova 1912); *Sul principio di reciprocità* (Giorn. del genio civile, 1913).

[2] Cfr. ad es. W. Ritter, *Anwendungen der graphischen Statik*, Dritter Teil, Zürich 1900, pp. 89 e seg.