ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Meccanica. — *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente.* Nota II del dott. FRANCESCO SBRANA, presentata dal Corrisp. O. TEDONE.

6. Ci occuperemo ora brevemente delle verifiche alle quali abbiamo innanzi accennato.

Per adoperare formule non molto complicate, possiamo supporre dapprima $f(\xi) = 0$. Sostituendo, in questa ipotesi, nella (8), il valore di $\varphi(\eta)$ dato dalla (8'), troviamo l'equazione:

$$\int_0^{\eta_0} F(\xi) \left\{ I_0(\eta_0 - \xi) - I_0\left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \int_\xi^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) d\eta \right\} d\xi = 0$$

nella quale $F(\xi)$ è una funzione arbitraria. Dev'essere dunque:

$$(12) \qquad \int_\xi^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) d\eta = I_0(\eta_0 - \xi) - I_0\left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right).$$

Allo stesso risultato si giunge quando si passa a verificare che il valore di $\varphi(\eta)$ dato dalla (9') soddisfa alla (9).

Supponiamo ora che le (10), (10') siano scritte per η_0 compreso tra l e $2l$, ritenendo sempre $f(\xi) = 0$. Sostituiamo, nella (10), a $\varphi(\eta)$, dove questa funzione compare con $\eta < l$, l'espressione data dalla (8'), e dove compare con η compreso tra l e $2l$, il valore dato dalla (10'). Nella identità che ne deve risultare, una parte contiene esplicitamente la sola $F(\xi)$, la parte rimanente contiene esplicitamente la sola $\psi(\eta)$. L'espressione che contiene la sola $F(\xi)$ è la seguente:

$$- \int_0^l I_0(\eta_0 - \eta) \left\{ F(\eta) - \int_0^\eta F(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) d\xi \right\} d\eta +$$

$$+ \int_0^l F(\xi) I_0\left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right) d\xi +$$

$$+ \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) d\eta \int_0^l F(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) d\xi ,$$

e si trova subito che si annulla, quando si ritenga valida la (12). Infatti, con qualche semplice scambio di integrazioni, essa si può trasformare nell'altra:

$$\int_0^l F(\xi) \left\{ I_0\left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right) - I_0(\eta_0 - \xi) + \right.$$
$$\left. + \int_\xi^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) d\eta \right\} d\xi .$$

L'espressione che contiene esplicitamente la sola $\psi(\eta)$ si scrive:

$$- \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \psi(\eta - l)\, d\eta -$$
$$- l \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, d\eta \int_0^{\eta - l} \frac{I_0\left(\sqrt{(\xi - \eta)^2 - l^2}\right)}{\sqrt{(\xi - \eta)^2 - l^2}}\, \psi(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^{\eta_0 - l} I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta ,$$

e, per quanto abbiamo ora dimostrato, deve per proprio conto annullarsi. Mutando, nei primi due integrali, η in $\eta - l$, e facendo nel secondo uno scambio di integrazioni, troviamo che deve sussistere l'equazione:

$$\int_0^{\eta_0 - l} \psi(\eta) \left\{ I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) - I_0(\eta_0 - \eta - l) - \right.$$
$$\left. - l \int_\eta^{\eta_0 - l} \frac{I_1\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right)}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}}\, I_0(\eta_0 - \xi - l)\, d\xi \right\} d\eta = 0 ,$$

e poichè in essa $\psi(\eta)$ è una funzione arbitraria, deve aver luogo l'identità

$$(13) \qquad l \int_\eta^{\eta_0 - l} \frac{I_1\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right)}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}}\, I_0(\eta_0 - \xi - l)\, d\xi =$$
$$= I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) - I_0(\eta_0 - \eta - l) .$$

Alla stessa formula si perviene, quando si fa l'analoga verifica per $\psi(\eta)$, essendo η compreso tra l e $2l$, e per $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, essendo η compreso in uno degli intervalli successivi. Se supponessimo $F(\xi) = 0$, otterremmo le relazioni che si hanno anche dalle (12), (13), derivando ambo i membri rapporto a η_0.

7. Passiamo ora a dimostrare le identità (12), (13). La identità (12) è una conseguenza immediata delle altre due:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_0 - x)\, I_0(x_1 - x)}{x_0 - x}\, dx = I_1(x_1 - x_0) \\ & \int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, I_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right) dt = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right) I_0\left(\sqrt{t_1^2 - r^2}\right) \end{aligned} \right.$$

dimostrate dal prof. Tedone [1]. Infatti, la seconda di queste relazioni, mutando in essa r in ξ, e t_1 in η, si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) = \int_\xi^\eta \frac{I_1(\eta - t)}{r - t} I_0\left(\sqrt{t^2 - \xi^2}\right) dt - \frac{\partial}{\partial \eta} I_0\left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right),$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $I_0(\eta_0 - \eta)\, d\eta$, e integriamo rapporto a η tra i limiti ξ e η_0; tenendo conto della prima delle (14) otteniamo subito la (12).

Per dimostrare la (13), possiamo osservare che si ha:

$$\int_\eta^{\eta_0 - l} \left\{ I_0\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\eta_0 - \xi - l) + \right.$$
$$\left. + I_0(\eta_0 - \xi - l) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right) \right\} d\xi =$$
$$= I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) - I_0(\eta_0 - \eta - l),$$

ovvero, eseguendo le derivazioni sotto l'integrale a primo membro:

$$- \int_\eta^{\eta_0 - l} \left\{ I_0\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right) I_1(\eta_0 - \xi - l) + \right.$$
$$\left. + I_0(\eta_0 - \xi - l) \frac{I_1\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right)}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}} (\eta - \xi - l) \right\} d\xi =$$
$$= I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) - I_0(\eta_0 - \eta - l).$$

È quindi evidente che la (13) è conseguenza dell'altra:

$$(15) \quad \int_\eta^{\eta_0 - l} \left\{ I_0\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right) I_1(\eta - \xi - l) + \right.$$
$$\left. + I_0(\eta_0 - \xi - l) \frac{I_1\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right)}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}} (\eta - \xi) \right\} d\xi = 0.$$

È più agevole forse verificare quest'ultima relazione della prima, e tale verifica si conduce a termine facilmente, partendo dallo sviluppo in serie delle funzioni di Bessel che compaiono sotto l'integrale a primo membro, e seguendo la stessa dimostrazione della seconda delle (14) data dal professore Tedone.

8. Si può notare che i precedenti risultati si estendono senza difficoltà al caso in cui gli estremi della corda, invece di essere fissi, si muovano secondo leggi assegnate. Le equazioni integrali, da cui dipendono le funzioni incognite, sono della stessa forma, solo i termini noti risultano modificati; ed alla loro soluzione si può arrivare con lo stesso metodo precedente.

[1] Ved., *Sulla integrazione* ecc. questi Rendiconti, seduta 31 maggio 1913; *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate*, seduta 18 gennaio 1914.