

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

In questa esperienza la creatina, mescolata all'estratto acquoso di fegato di cane, lasciata in termostato a 37° per 9 giorni, si comportava come un corpo perfettamente neutrale; questo fatto dimostra che l'arginasi non determinò formazione (neanche in piccola quantità) di sarcosina, che si sarebbe messa in evidenza colla titolazione al formolo.

Dai risultati di queste esperienze si possono trarre le seguenti conclusioni:

1°) *Per azione dell'arginasi non ha luogo, concordemente con quanto ebbe ad osservare anche Dakin, la scissione della creatina in urea e sarcosina;*

2°) *L'arginasi non è un fermento capace di staccare il nucleo guanidinico indistintamente da ogni sostanza che lo porta legato, come vorrebbe indicare la denominazione di « deguanidasi » da Abderhalden proposta recentemente al posto di quella di arginasi;*

3°) *L'incapacità dell'arginasi di idrolizzare la creatina sta a favore del concetto della specificità di azione di questo fermento.*

Chimica fisiologica. — *Contributo allo studio dell'azione dei fermenti proteolitici sui polipeptidi.* Nota del dott. ANTONINO CLEMENTI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

I numeri reali (*), Q_0 , gli interi, N_0 , e i razionali, R_0 , contenuti nei Q_0 , sono, indubbiamente, degli *enti semplici* ⁽⁶⁾ e precisamente degli

(*) Avrò occasione di citare i lavori seguenti:

(¹) G. Peano, *Formulario*, ed. I-V.

(²) M. Pieri, *Sopra gli assiomi aritmetici* [Acc. Gioenia in Catania, fasc. 2°, ser. 2ª, 1908].

(³) S. Catania, *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano* [Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, 2° sem., 1913, pp. 546-551, 639-642].

(⁴) C. Burali-Forti, *Propriétés formules etc.*, [Revue de mathématique di G. Peano, tom. VI, 1900, pp. 141-177 (Estratti, G. B. Petroni, Torino)].

(⁵) Idem, *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri* [Atti della R. Accad. di Torino, vol. XXXIX, 1904].

(⁶) Idem, *Gli enti astratti ecc.* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXI, ser. 5ª, 2° sem., 1912, pp. 667-682).

(⁷) Idem, *Sur les lois générales etc.* (International Congress of mathematicians, Cambridge 1912).

operatori ⁽³⁾ ⁽⁷⁾ per le grandezze. Questo carattere dei Q_0 , che è stato precisato con le moderne ricerche logico-matematiche, ha origine antichissima, come lo provano, fra altro, il *rapporto* di Euclide e il concetto, più moderno, di *misura*, al quale vien collegata la frase erronea *numero concreto* e la frase inutile *numero astratto*. Di più: nelle *applicazioni* della matematica, i numeri compariscono non perchè numeri, ma perchè *misure di grandezze* sulle quali effettivamente si *deve* operare. Ora: definiti gli N_0 , R_0 , Q_0 , in modo anche logicamente perfetto, come *enti a sè*, non è fatto tutto; occorre *collegarli con le grandezze*. Ed ecco, secondo me, il capitale difetto *logico* e *pratico* dei metodi ordinari; *dover collegare i Q_0 alle grandezze*, mentre i Q_0 hanno ragione di esistere solo perchè, *dati dalle grandezze, servono a rappresentare queste in modo univoco e reciproco*.

Ho tentato altre volte ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ di ottenere i Q_0 dalle grandezze, senza però riuscire, sia ad evitare alcune complicazioni di forma, sia a far precedere la definizione dei Q_0 (classe *generale* dei numeri) a quella delle classi (parziali) N_0 , R_0 . Credo di esser riuscito ora ad evitare ogni complicazione di forma e dedurre direttamente, in modo elementare (*), la classe totale Q_0 dalle grandezze, mantenendo ai numeri la *forma* e la *sostanza loro proprie da secoli*.

1. In tutto ciò che segue mi riferisco al contenuto dei nn. 1 e 2 (*) della mia Nota ⁽⁵⁾.

Interessa far notare che, essendo f una operazione per gli u , la frase « u è una classe di grandezze omogenee rispetto all'operazione f per gli u » significa che « per u ed f valgono le proprietà I-VIII del n. 2 della nota ⁽⁵⁾ »; e niente altro che questo. Ne segue che le I-VIII *non* sono postulati per le grandezze [cfr. ⁽⁵⁾] e che l'*omogeneità* è carattere cumulativo di u e di f e non di u o di f soltanto (**).

(*) Immediatamente applicabile all'insegnamento. Il prof. S. Catania, al quale ho comunicato i risultati ottenuti, sta appunto preparando una esposizione sistematica della teoria delle grandezze e dei numeri, che, credo, potrà sostituire le altre trattazioni più complesse.

(*) Nella 1-3 di ⁽⁵⁾ si ponga $as[u - Nul(u, f)]fx$, altrimenti non si può fare a meno della proprietà commutativa di f . Inoltre, come mi ha fatto osservare il prof. Catania, alle I-VIII del n. 2 occorre aggiungere la VII' seguente

$$x, y \in u - Nul(u, f) \cdot y \in \theta(u, f) \cdot x \cdot Q_{x, y} \cdot x \in \theta(u, f) (xfy)$$

che è pure indipendente dalle altre I-VIII e che permette di affermare, senza far uso della proprietà commutativa di f , che per gli u vale il principio di Archimede.

(**) La prima osservazione basta per risparmiare qualsiasi vuota discussione sulla *esistenza* delle classi di grandezze; la seconda prova che le frasi comuni « x è una classe di grandezze omogenee », « a, b sono grandezze omogenee », sono, per il significato da noi dato a Grand f , del tutto prive di significato, poichè non contengono l'operazione rispetto alla quale esiste l'omogeneità.

In ciò che segue — e non ripeteremo tale ipotesi — supponiamo che u sia una classe di grandezze omogenea rispetto ad una operazione (somma) che, per seguire l'uso comune, indicheremo col segno $+$. Inoltre intenderemo introdotti, mediante il θ di ⁽⁵⁾, i segni $>$, $<$ e l' (limite superiore) ^(***) e sottintenderemo gli indici u , $+$ ai simboli θ , Nul, ecc., per semplificare la scrittura, salvo a porli esplicitamente quando la notazione abbreviata possa dar luogo ad equivoci. L'unico elemento di u , che è nullo rispetto all'operazione $+$ ⁽⁵⁾, lo indicheremo con 0 (zero).

2. Tra gli operatori per gli u giova considerare subito quello *nullo*, che indicheremo con 0 (*zero*, come l'elemento di u che è nullo rispetto a $+$) e l'*identità*, che indicheremo con 1 (*uno*);

$$\begin{aligned} [1] \quad 0 &= \iota [ufu \cap \alpha z \{x \varepsilon u \cdot \mathcal{O}_x \cdot \alpha x = 0\}] \\ [2] \quad 1 &= \iota [ufu \cap \alpha z \{x \varepsilon u \cdot \mathcal{O}_x \cdot \alpha x = x\}]. \end{aligned}$$

e per semplicità non porremo l'indice u e $+$ a 0 ed 1, come regolarmente dovrebbe farsi, perchè (n. 1) u e $+$, essendo *fissi*, possono essere *sottintesi*.

Esiste almeno un operatore α , per gli u , tale che $\alpha x = 0$, ovvero $\alpha x = x$, perchè è stabilito, con *legge finita*, quale è l' u che corrisponde ad un x di u fissato ad arbitrio. Tale operatore è anche *unico* ⁽³⁾, perchè, se per β sono verificate le medesime condizioni, si ha indubbiamente $\alpha x = \beta x$, cioè $\alpha = \beta$, essendo x arbitrario. Segue dunque che:

$$[3] \quad 0, 1 \varepsilon ufu (*)$$

3. Con le notazioni *complete*

$$Q_0(u, +), N_0(u, +), R_0(u, +)$$

indicheremo, rispettivamente, le classi dei *numeri reali, interi, razionali*, che definiremo come *classi di operatori per gli u rispetto all'operazione $+$* . Ma per semplificare (nn. 1, 2) la scrittura, nelle proposizioni [4]-[17] sottintenderemo gli indici u , $+$, scrivendo semplicemente Q_0 , N_0 , R_0 . In seguito (n. 8) le notazioni Q_0 , N_0 , R_0 , *prive realmente degli indici u , $+$* , indicheranno delle *classi assolute*.

Definiamo la classe Q_0 , ponendo

$$\begin{aligned} [4] \quad Q_0 &= \iota [Cls' (ufu) \cap w z \{ \\ &A. a, b \varepsilon u \cdot a \cdot = 0 \cdot \mathcal{O}_{a, b} \cdot \iota \{w \cap \alpha z (\alpha a = b)\} \varepsilon w \cdot \therefore \\ &B. \alpha \varepsilon w \cdot a, b \varepsilon u \cdot \mathcal{O}_{\alpha, a, b} \cdot \alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b \cdot \therefore \\ &C. \alpha \varepsilon w : \mathbb{U} u \cdot \iota 0 \cap x z (\alpha x = x) : a \varepsilon u \cdot \iota 0 \cdot \mathcal{O}_{\alpha, a} \cdot \alpha a = a \cdot \therefore \\ &D. \alpha, \beta, \gamma \varepsilon w : \mathbb{U} u \cdot \iota 0 \cap x z (\gamma x = \alpha x + \beta x) : a \varepsilon u \cdot \iota 0 \cdot \mathcal{O}_{\alpha, \beta, \gamma, a} \cdot \\ &\quad \gamma a = \alpha a + \beta a \} (*)]. \end{aligned}$$

(***) $x < y \cdot = x \varepsilon \theta y; v \varepsilon Cls' u \cdot \mathcal{O} \cdot l' v = \iota [u \cap x \varepsilon (\theta x = \theta v)]$.

(*) Si osservi che, mentre 0 dipende da u e da $+$, perchè dipende dall'elemento di u che è nullo rispetto a $+$, l'operatore 1 dipende soltanto da u .

(*) A causa della B, non è facile [cfr. (1), ed. V, pag. 118] dimostrare la *indipendenza assoluta* delle A-D. Una eventuale dipendenza delle A-D non influisce sul procedimento usato in questa Nota per dedurre i Q_0 dalle grandezze.

Vale a dire: Q_0 è quella classe di operatori per gli u che, rispetto alla operazione $+$, soddisfa alle condizioni $A-D$. La A esprime che esiste un Q_0 , ed uno solo, che trasforma un elemento a non nullo di u in un elemento b di a ; la B dice che ogni Q_0 è operatore distributivo rispetto alla somma; le C, D esprimono che le condizioni $\alpha x = x$, $\gamma x = \alpha x + \beta x$, verificate per un x di u non nullo, sono vere per qualsiasi altro u non nullo. E queste sono proprietà elementari e ben note dei Q_0 .

Nelle proposizioni [5]-[16] intendiamo *ammesso* che Q_0 sia una classe univocamente determinata dalle condizioni $A-D$ della [4]. In seguito, n. 7, dimostreremo che ciò avviene realmente.

Intanto si ha:

$$[5] \quad 0, 1 \in Q_0 (**).$$

4. La somma per i Q_0 sarà indicata, come d'uso, col segno $+$, senza che vi sia pericolo di equivoco. Porremo:

$$[6] \quad \alpha, \beta \in Q_0 \cdot \cap \cdot \alpha + \beta = 1 [Q_0 \cap \gamma \in \{x \in u \cdot \cap \cdot \gamma x = \alpha x + \beta x\}];$$

e risulta subito:

$$[7] \quad \alpha, \beta \in Q_0 \cdot \cap \cdot \alpha + \beta \in Q_0:$$

cioè, $+$ è una operazione per i Q_0 .

È facilissimo dimostrare che per i Q_0 definiti dalla [4], e l'operazione $+$ definita dalla [6], valgono le proprietà I-VIII del n. 1, e quindi che

$$[8] \quad Q_0 \in \text{Grand } +,$$

cioè i Q_0 formano una classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione $+$ definita dalla [6] (*).

Dunque tutte le proprietà degli u che si possono dedurre dalla I-VIII valgono, e non vi è bisogno di altra dimostrazione, per i Q_0 . Notevole economia di tempo.

5. L'intimo legame tra le classi u , Q_0 è posto in piena luce dalle due proposizioni seguenti, ben note e importantissime:

$$[9] \quad a \in u \cdot \cap 0 \cdot \cap \cdot u = Q_0 a,$$

(**) Da B segue $\alpha 0 = 0$. Se per $x = 0$ si ha $\alpha x = 0$, allora $\alpha x = \alpha x + \alpha x$ e, per la D , $\alpha a = \alpha a + \alpha a$, da cui $\alpha a = 0$. Ma da B risulta che esiste a tale che $\alpha x = 0$: dunque ecc.

(*) Per la dimostrazione della [8] giovano le proprietà seguenti:

$$(a). \quad \alpha \in Q_0 \cdot a \in u \cdot \cap \cdot \alpha a = 0 :: \alpha = 0 \cdot \cup \cdot a = 0;$$

$$(b). \quad a, b \in u \cdot \alpha \in Q_0 \cdot \cap 0 \cdot \cap \cdot a \supseteq b :: \alpha a \supseteq \alpha b;$$

$$(c). \quad \alpha \in Q_0 \cdot \cap 0 + \alpha = \alpha;$$

$$(d). \quad \alpha, \beta \in Q_0 \cdot a \in u \cdot \cap 0 \cdot \cap \cdot \alpha a > \beta a :: \alpha \in (Q_0 \cdot \cap 0) + \beta.$$

La (c) prova che l'operatore nullo, 0, è pure l'elemento di Q_0 che è nullo rispetto alla operazione $+$ definita dalla [6].

(u è, rispetto all'operazione $+$, sistema lineare ad una dimensione);

$$[10] \quad \begin{cases} \alpha \varepsilon Q_0 - u \cdot \circ \cdot \alpha u = u, \text{ oppure} \\ Q_0 - u \cdot \circ \cdot (u f u) \text{ rep} \end{cases}$$

(ogni Q_0 non nullo è operatore univoco e reciproco per gli u).

Per la dimostrazione della [10], e anche per le cose seguenti, giova ricordare che, essendo i Q_0 operatori per gli u , il prodotto funzionale (?) di un Q_0 per un altro è un Q_0 univocamente determinato, che tale prodotto (*) è associativo, e che $0\alpha = \alpha 0 = 0$, $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$. Se α è un Q_0 non nullo, dalla condizione $\alpha\alpha = \alpha$ segue $\alpha = 1$, perchè da $\alpha(\alpha x) = \alpha x$ segue $\alpha = 1$. Da $\beta\alpha = 1$ segue $\alpha\beta\alpha = \alpha$, poi $\alpha\beta\alpha\beta = \alpha\beta$ e quindi anche $\alpha\beta = 1$. Ora, da A e dalla [8] risulta che esiste un solo elemento β di Q_0 tale che $\beta\alpha = 1$, o anche $\alpha\beta = 1$; inoltre l'equazione $\alpha x = a$ ha per soluzione, unica, $x = \beta a$, e quindi β è precisamente l'operatore inverso di α (e la [10] è così dimostrata) che indicheremo, come d'uso, con α^{-1} senza che, per ora, si dia ad 1 il significato stabilito dalla [2] (**).

6. Definiamo ora la classe N_0 seguendo Peano (1) o Pieri (2), non più mediante postulati, ma bensì con definizione nominale che dà la legge di formazione degli N_0 mediante 0 ed 1 nella classe Q_0 .

$$[11] \quad N_0 = \{ \text{Cls}' Q_0 \cap v \varepsilon \{ 0 \varepsilon v : 1 + v \cdot \circ v : w \varepsilon \text{Cls}' v \cdot 0 \varepsilon w \cdot 1 + w \cdot \circ w \cdot \circ w \cdot w = v \cdot 1 \} \}$$

[Peano (1)].

$$[11'] \quad N_0 = \{ \text{Cls}' Q_0 \cap v \varepsilon \{ 0 \varepsilon v : 1 + v \cdot \circ v : w \varepsilon \text{Cls}' v \cdot \circ w \cdot \text{A} w \cdot (1 + w) \} \}$$

[Pieri (2)].

Nella [11] la condizione $0 \varepsilon N_0 : 1 + N_0 \cdot \circ N_0$ dice che i Q_0 , formati con 0 ed 1 soltanto,

$$(a) \quad 0, 1 + 0, 1 + 1 + 0, 1 + 1 + 1 + 0, \dots \dots \dots,$$

appartengono tutti alla classe N_0 ; inoltre la condizione

$$w \varepsilon \text{Cls}' N_0 \cdot 0 \varepsilon w \cdot 1 + w \cdot \circ w \cdot \circ w \cdot w = N_0$$

dice che con la legge (a) si ottengono tutti e soli gli N_0 .

(*) Se α, β sono Q_0 , operatori a sinistra per gli u , indico brevemente con $\beta\alpha$ il prodotto funzionale di α per β . Però tale notazione abbreviata non è regolare e può condurre ad assurdi [cfr. (1), n. 13]; mentre è regolarissima (ibid., n. 12) la notazione αa , ove a è un u . Per il segno esplicito di prodotto funzionale dei Q_0 si dovrà far uso del segno $\times$ poichè (n. 9) il prodotto funzionale dei Q_0 è niente altro che il loro prodotto aritmetico.

(**) Per il rapporto di Euclide si ha

$$a, b \varepsilon u \cdot a = 0 \cdot \circ b/a = \{ Q_0 \cap \alpha \varepsilon [\alpha a = b] \}$$

e da A risulta che $b/a \varepsilon Q_0$. In virtù della [8], la proposizione precedente definisce anche il rapporto tra un Q_0 e un altro non nullo, e si ha $\beta/\alpha = \alpha^{-1}\beta$, $1/\alpha = \alpha^{-1}$.

Il procedimento seguito in questa Nota per dedurre i Q_0 dalle grandezze è dunque, in sostanza, il metodo dei rapporti di Euclide, reso più agile dalla mancanza degli N_0 e dalla presenza degli operatori; inoltre è precisato logicamente.

Lo stesso dice la [11'] quando, come ha fatto Pieri, si deduca dalla [11'] il *principio d'induzione* che è esplicitamente contenuto nella [11] e dà, anzi, la legge *finita* (*) di formazione degli N_0 .

Segue subito che:

$$[12] \quad N_0 \varepsilon \text{Cls}' Q_0.$$

Definiamo la classe R_0 , ponendo (n. 5)

$$[13] \quad R_0 = (N_0 - \iota 0)^{-1} N_0;$$

e dalla [12] e dal n. 5 si ha subito

$$[14] \quad R_0 \varepsilon \text{Cls}' Q_0 (*).$$

Dimostrato il principio di Archimede [cfr. (4), 38.1], e dimostrato che ogni Q_0 è compreso tra due N_0 consecutivi (non escluso l'estremo minore), si ha:

$$[15] \quad \alpha \varepsilon Q_0 \cdot \bigcirc \cdot \alpha = 1^1 \{ R_0 \cap (\theta \alpha \cup \iota \alpha) \} (**),$$

dalla quale risulta

$$[16] \quad Q_0 = 1^1 \{ \text{Cls Lim } R_0 \},$$

cioè che la classe Q_0 è costruibile mediante classi limitate ed esistenti di R_0 e il limite superiore (***).

7. Gli operatori 0, 1 per gli u sono univocamente determinati (n. 2), anche indipendentemente dalle condizioni A-D. Una volta ammesso che le A-D individuino una, ed una sola, classe Q_0 , risulta, [11], che la classe N_0 è EFFETTIVAMENTE COSTRUIBILE mediante 0, 1, + con legge finita; con legge parimente finita è COSTRUIBILE, [13], la classe R_0 , e, mediante questa, [15], è EFFETTIVAMENTE COSTRUIBILE la classe Q_0 , sempre mediante 0, 1, +, la classe u e l'operazione + per gli u .

(*) Le leggi [11], [11'] sono *equivalenti* perchè l'una è deduttibile dall'altra (2); ma la [11'] è *finita*, e quindi è pure *finita* la [11]. Il *ragionamento per induzione* è dunque *ragionamento finito*, e il *principio d'induzione* caratterizza le classi finite, contrariamente all'opinione di Poincaré accettata da alcuni anche in Italia.

(*) L'operatore inverso dell'identità è pure l'identità: e quindi $N_0 \bigcirc R_0$ senza bisogno di nuove convenzioni, antilogiche sempre perchè conducono ad *identificare enti essenzialmente distinti*.

(**) Come legame tra gli u e i Q_0 si ha

$$\alpha \varepsilon Q_0 \cdot \bigcirc \cdot \alpha \varepsilon \text{Cls}' R_0 \cap v \varepsilon \{ x \varepsilon u \cdot \bigcirc x \cdot \alpha x = 1^1 (v x) \}.$$

(***) Allo stesso risultato si giunge, sebbene sotto forma più complessa e punto chiara, anche quando ci si ostini a voler far uso delle *pesanti* e *antiestetiche* classi *contigue*, in luogo del concetto semplice chiaro ed elegante di *limite superiore*.

Dunque: mediante le condizioni A-D è possibile di COSTRUIRE EFFETTIVAMENTE, una, ed una sola, classe di operatori per gli u rispetto a $+$, che soddisfa, [15], alle condizioni A-D. Ne segue che: la [4] definisce una, ed una sola, classe Q_0 rispetto ad u e $+$, cioè che

$$[17] \quad Q_0 \in \text{Cls}'(u f u).$$

8. Torniamo a porre il segno generico f in luogo del segno speciale $+$ per gli u , riserbando questo, definito dalla [6], per i Q_0 . Alla notazione abbreviata Q_0 (n. 3) sostituiamo quella completa $Q_0(u, f)$; e lo stesso facciamo per N_0 ed R_0 . Inoltre indichiamo con u' una classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione f' , e con $0'$ l'elemento di u' che è nullo rispetto ad f' .

Se α è un $N_0(u, f)$ e x è un u , risulta, dalle cose precedenti, che αx è formato, nella classe u , mediante $0, x, f$, come α è formato, nella classe $Q_0(u, f)$, mediante $0, 1, +$. Se x' è un u' , la notazione $\alpha x'$ è attualmente priva di significato perchè α non è un $Q_0(u', f')$. Noi converremo di indicare con $\alpha x'$ quell'elemento di u' che è formato, nella classe u' , mediante $0', x', f'$, come αx è formato, nella classe u , mediante $0, x, f$, cioè come α è formato, nella classe $Q_0(u, f)$, mediante $0, 1, +$ (*).

E tale convenzione è lecita, perchè l'indicata formazione di αx nella classe u dipende esclusivamente dalle proprietà I-VIII di u ed f , proprietà che NON VARIANO col variare di u ed f .

In base a tale convenzione, e alla permanenza delle I-VIII, possiamo indicare, come d'uso, con i simboli $0, 1, 2, 3, \dots$, assoluti, cioè indipendenti da u e da f , gli elementi della classe $N_0(u, f)$. Allora $0, 1, 2, 3, \dots$ formano una classe assoluta, N_0 , di operatori per u, f arbitrari. Dalla [13] risulta che, mediante la classe assoluta N_0 , si ottiene la classe, pure assoluta R_0 . Inoltre, se osserviamo che nella [15] la classe $R_0 \cap (\theta \alpha \cup i \alpha)$ è unica, allora dalla [16] risulta che R_0 dà la classe assoluta Q_0 di operatori per u, f arbitrari (*).

9. Se α, β sono N_0 , si prova facilmente (1) che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ e che $\beta \alpha = \alpha \beta$; da questo e da [13], [16] risulta che per la somma e per il

(*) Per un'altra forma mediante corrispondenza ordinata, cfr. la mia Nota (5) n. 4. La forma del testo è più semplice.

(*) Ottenuta così la classe assoluta Q_0 , e se α è un suo elemento qualunque, allora, purchè si operi in una classe u, f , omogenea, αx è un u determinato. Ma se insieme con x non son dati u ed f (n. 1), allora αx è notazione priva di significato. Come pure se u è omogeneo rispetto a due operazioni distinte f, f' , allora αx indica due elementi distinti, uno in u, f , l'altro in u, f' .

La questione « se esiste un'operazione f per gli u soddisfacente alle I-VIII, può esserle un'altra f' diversa da f ? » può avere interesse in sè, ma non ne ha per la teoria generale delle grandezze e dei Q_0 . A questo proposito ritengo dubbie le ultime due proposizioni della mia Nota (5).

prodotto funzionale dei Q_0 vale la proprietà *commutativa*. Se a, b sono elementi arbitrari di u , allora, fissato c non nullo di u , si ha $a = \alpha c, b = \beta c$, da cui

$$a + b = \alpha c + \beta c = (\alpha + \beta)c = (\beta + \alpha)c = \beta c + \alpha c = b + c$$

e quindi risulta, come ha già dimostrato il sig. Huntington ⁽⁵⁾, che la proprietà commutativa della somma delle grandezze è conseguenza delle I-VIII.

Infine è ovvio che il *prodotto funzionale* dei Q_0 coincide con l'ordinario *prodotto aritmetico*, e che l'operatore α^{-1} , *inverso* di α , coincide con l'ordinario *reciproco* di α .

In tal modo, senza ricorrere all'iper-logica e a classi di classi, è possibile ottenere in modo semplice rapido e rigoroso i numeri reali nella forma e sostanza abituale e loro propria da secoli, ed inoltre ottenerli già collegati con le grandezze perchè dedotti da queste.

Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota II di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

4. Riferendoci per le notazioni ed i simboli alla Nota pubblicata nel fascicolo precedente di questi Rendiconti col medesimo titolo, possiamo supporre che la funzione φ del n. 3 contenga, oltre alla variabile x , un parametro α ; sia cioè

$$(4) \quad F = F[\varphi(x|\alpha)] \quad , \quad \varphi(x|\alpha) = \varphi[\psi(\xi)^{\frac{1}{\alpha}}, x|\alpha](\psi(x)) \quad ,$$

per cui F si potrà considerare come dipendente da tutti i valori di $\psi(\xi)$ fra 0 e 1, ed inoltre dal parametro α . Vogliamo calcolare la derivata (ordinaria) di F rispetto ad α . Si ha:

$$\varphi(x|\alpha + \Delta\alpha) = \varphi(x|\alpha) + \Delta\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \quad ,$$

indicando con $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)$ il valore di $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ per un valore conveniente di α . Inoltre, se $F[\varphi]$ non ha punti eccezionali, e se $\Delta\alpha$ è supposto infinitesimo,

$$\delta F = \int_0^1 F'[\varphi(x|\alpha), y] \delta \varphi(y|\alpha) dy \quad .$$

Sostituendo a $\delta \varphi$ l'espressione dedotta dalla formola precedente, e dividendo ambo i membri per $\Delta\alpha$, si ottiene:

$$(IV) \quad \frac{\partial F[\psi(\xi), \alpha]}{\partial \alpha} = \int_0^1 F'[\varphi(x|\alpha), y] \frac{\partial \varphi(y|\alpha)}{\partial \alpha} dy \quad .$$