

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

prodotto funzionale dei Q_0 vale la proprietà *commutativa*. Se a, b sono elementi arbitrari di u , allora, fissato c non nullo di u , si ha $a = \alpha c, b = \beta c$, da cui

$$a + b = \alpha c + \beta c = (\alpha + \beta)c = (\beta + \alpha)c = \beta c + \alpha c = b + c$$

e quindi risulta, come ha già dimostrato il sig. Huntington (5), che la proprietà commutativa della somma delle grandezze è conseguenza delle I-VIII.

Infine è ovvio che il *prodotto funzionale* dei Q_0 coincide con l'ordinario *prodotto aritmetico*, e che l'operatore α^{-1} , *inverso* di α , coincide con l'ordinario *reciproco* di α .

In tal modo, senza ricorrere all'iper-logica e a classi di classi, è possibile ottenere in modo semplice rapido e rigoroso i numeri reali nella *forma e sostanza abituale e loro propria da secoli*, ed inoltre ottenerli già collegati con le grandezze perchè dedotti da queste.

Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota II di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

4. Riferendoci per le notazioni ed i simboli alla Nota pubblicata nel fascicolo precedente di questi Rendiconti col medesimo titolo, possiamo supporre che la funzione φ del n. 3 contenga, oltre alla variabile x , un parametro α ; sia cioè

$$(4) \quad F = F[\varphi(x|\alpha)] \quad , \quad \varphi(x|\alpha) = \varphi[\psi(\xi), x|\alpha](\psi(x)) \quad ,$$

per cui F si potrà considerare come dipendente da tutti i valori di $\psi(\xi)$ fra 0 e 1, ed inoltre dal parametro α . Vogliamo calcolare la derivata (ordinaria) di F rispetto ad α . Si ha:

$$\varphi(x|\alpha + \Delta\alpha) = \varphi(x|\alpha) + \Delta\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \quad ,$$

indicando con $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)$ il valore di $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ per un valore conveniente di α . Inoltre, se $F[\varphi]$ non ha punti eccezionali, e se $\Delta\alpha$ è supposto infinitesimo,

$$\delta F = \int_0^1 F'[\varphi(x|\alpha), y] \delta \varphi(y|\alpha) dy \quad .$$

Sostituendo a $\delta \varphi$ l'espressione dedotta dalla formola precedente, e dividendo ambo i membri per $\Delta\alpha$, si ottiene:

$$(IV) \quad \frac{\partial F[\psi(\xi), \alpha]}{\partial \alpha} = \int_0^1 F'[\varphi(x|\alpha), y] \frac{\partial \varphi(y|\alpha)}{\partial \alpha} dy \quad .$$

Come esempio prendiamo

$$(4') \quad \varphi(x|\alpha) = \int_0^1 \lambda(x, \xi|\alpha) \psi(\xi) d\xi + \psi(x);$$

l'applicazione della (IV) ci fornisce:

$$(IV') \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^1 F'[\varphi(x|\alpha), \xi] d\xi \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta|\alpha)}{\partial \alpha} \psi(\eta) d\eta,$$

e questa coincide con una formola trovata direttamente dal prof. Volterra nel n. 3 della Nota dianzi citata, dove la $F[\varphi(x|\alpha)]$, con F funzione arbitraria e $\varphi(x|\alpha)$ data dalla (4'), è la soluzione di una certa equazione alle derivate funzionali.

5. Il sistema

$$(5) \quad \begin{cases} F(x) = F[\varphi_0^1, x] \\ \varphi(\xi) = \varphi(f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)), \end{cases}$$

mediante il quale si fa dipendere F da tutti i valori di $f(\xi)$ fra 0 e 1, è affine a quello formato dalle (1). Noi supponiamo $F[\varphi]$ priva di punti eccezionali. Volendo la derivata di F rispetto ad f , osserveremo intanto che si ha:

$$\delta \varphi = \sum_{r=0}^n \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(r)}} \delta f^{(r)},$$

e se noi assumiamo δf sempre nulla fra 0 e 1 eccetto che in un intervallo $(\mu \nu)$, la stessa cosa accadrà per $\delta \varphi$.

D'altra parte si ha:

$$\delta F = \int_{\mu}^{\nu} F'[\varphi(\xi), x, \eta] \delta \varphi(\eta) d\eta;$$

sostituendo colla formola precedente ed eseguendo trasformazioni ben note, si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_{\mu}^{\nu} \delta f(\eta) \left\{ F'[\varphi(\xi), x, \eta] \frac{\partial \varphi}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial f'} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} \left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(n)}} \right) \right\} d\eta + \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i \frac{\partial^i \delta f}{\partial \eta^i} \right)_{\mu}, \\ p_i &= \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^{n-r-i} \frac{\partial^{n-r-i}}{\partial \eta^{n-r-i}} \left(F'[\varphi(\xi), x, \eta] \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(n-r+1)}} \right). \end{aligned}$$

Col tendere di tutti i punti di $(\mu \nu)$ a ξ_1 , la differenza $\left(\sum_{i=0}^{n-1} \right)_{\mu}$ si annulla

per la continuità, che noi supponiamo, delle funzioni considerate, e si giunge così alla formola :

$$(V) \quad F' | [f(\xi), x, \xi_1] = \left[F' | [\varphi(\xi), x, \eta] \frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial f'} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} \left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(n)}} \right) \right]_{\eta=\xi_1}$$

La condizione che la $F | [\varphi]$ sia priva di punti eccezionali non è essenziale per la validità della (V). Se per es. si considera

$$(5') \quad F(x) = F | [\varphi_0^x, x] (\varphi(x)),$$

per modo che si abbia

$$\delta F = \int_0^x F' | [\varphi(\xi), x, \eta] \delta \varphi(\eta) d\eta + a \delta \varphi(x),$$

eseguendo la variazione di φ in un intervallo (μ, ν) interno al tratto $(0, x)$, l' \int_0^x si ridurrà a \int_μ^ν , mentre il termine $a \delta \varphi(x)$ s'annulla.

Pertanto la (V) vale ancora per la F definita dalla (5'), alla sola condizione che il punto ξ_1 , in cui si calcola la derivata di F , non coincida con x .

Meccanica. — *Nuove osservazioni teoriche sull'irraggiamento nero.* Nota del dott. CINO POLI, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Quando in una cavità chiusa, a pareti perfettamente riflettenti, sia contenuto un corpo a temperatura costante e uniforme T , la densità $u(\nu, T)$ dell'energia raggiante di frequenza ν è pure costante e indipendente dalla natura del corpo che si considera, e, secondo Planck (1), vale

$$(1) \quad u(\nu, T) = \frac{8 \pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

essendo h una costante universale di significato fisico non ancora precisato, e $\frac{3}{2} k T$ l'energia cinetica molecolare media di un gas perfetto alla temperatura assoluta T .

Come è noto, questa relazione, che è in ottimo accordo coll'esperienza, è stata dal Planck dimostrata con ipotesi estranee, ed anzi incompatibili coi

(1) Max Planck, *Theorie der Wärmestrahlung*. Leipzig, 1906, pag. 157.

principi della dinamica classica ⁽¹⁾, ed è opinione generalmente accettata ⁽²⁾ che essa non si possa ottenere col solo ausilio di questi ultimi.

Mi propongo invece di dimostrare che questa incompatibilità non esiste, poichè si può immaginare per la emissione un meccanismo conforme alle teorie classiche, per il quale si dimostra facilmente la formula di Planck. Chiuderò quindi la Nota con qualche osservazione sul significato e sul valore teorico di tali meccanismi.

2. Secondo le ipotesi fisiche generalmente accettate, l'irraggiamento di un corpo è prodotto dal moto di particelle elettrizzate contenute nel corpo stesso in numero enorme, e che nel sèguito indicherò brevemente col nome di ioni. Questi moti sono strettamente connessi alla natura fisica e chimica del corpo, cioè alla sua costituzione molecolare, atomica ed interatomica; possono dunque essere affatto diversi da corpo a corpo; ma se si suppone che questo sia circondato completamente da una superficie riflettente, essi divengono vincolati inoltre dalla condizione di non turbare l'equilibrio termico, nè quello elettromagnetico. Vale a dire che nel corpo nero il moto degli ioni, il quale influisce certamente sui moti molecolari (come è dimostrato dal fenomeno dell'assorbimento, per il quale energia elettromagnetica si trasforma, per l'intervento degli ioni stessi, in energia termica, cioè energia cinetica molecolare), deve esser tale da non alterare la distribuzione dell'energia molecolare che è richiesta dall'uniformità della temperatura; ed inoltre la quantità totale di energia elettromagnetica posseduta dagli ioni dovrà restare costante, poichè tale rimane quella presente nello spazio ambiente, come quella cinetica totale delle molecole.

Se dunque voglio costruire un meccanismo irraggiante, se cioè voglio immaginare che i moti degli ioni nel corpo nero siano di una data natura, dovrò curare di soddisfare alle condizioni suesposte.

Per quanto riguarda la costanza dell'energia totale degli ioni, supporrò addirittura che sia costante l'energia di ogni singolo ione. Questa ipotesi, assai più restrittiva del necessario, farà sì che il mio corpo fittizio non avrà riscontro nella realtà; ma ciò non importa per lo scopo che mi propongo, per il quale basta invece che le mie ipotesi non escano dal campo delle teorie classiche.

Per la condizione relativa all'equilibrio termico, ammetterò semplicemente che la legge dell'equipartizione dell'energia, quale si dimostra nella teoria cinetica dei gas, si applichi anche ai sistemi di molecole e di ioni, analogamente a quanto si fa nella teoria di Drude della conducibilità nei metalli. Sarà bene che faccia osservare subito, esplicitamente, che questo modo di estendere il teorema dell'equipartizione è radicalmente differente

⁽¹⁾ Intendendo, con questo nome, tanto la meccanica delle masse, quanto le teorie elettriche di Maxwell e Lorentz.

⁽²⁾ Cfr. *La théorie du rayonnement et les quanta*. Paris, 1912, *passim*.

da quello usato da Rayleigh, Jeans e Lorentz, e che conduce alla formula

$$(2) \quad u(\nu, V) = \frac{8\pi k \nu^2 T}{c^2}$$

in disaccordo coll'esperienza.

In questo ultimo metodo si equipartisce, se mi è lecito dire, anche l'energia raggianti, mentre questa non interviene affatto nell'ipotesi che io intendo applicare. È appunto questa modificazione sostanziale nel modo di intendere l'equipartizione, che permette di sfuggire alla formula di Rayleigh.

3. Con le due assunzioni fatte, sono senza altro in grado di ottenere la formula di Planck. Per semplificare i calcoli, supporrò ancora che ioni mobili abbiano solo cariche negative, e che possano solo oscillare rettilineamente intorno alla loro posizione di equilibrio.

Se allora chiamo q il momento di uno ione, cioè il prodotto della sua carica e per lo spostamento, la sua energia è della forma

$$(3) \quad E = K^2 q^2 + L^2 \left(\frac{dq}{dt} \right)^2;$$

e poichè essa è per ipotesi costante, e quindi $\frac{dE}{dt} = 0$, ho

$$(4) \quad L^2 \frac{d^2q}{dt^2} + K^2 q = 0,$$

ossia

$$(5) \quad q = a \cos(2\pi \nu t - \vartheta),$$

essendo a l'ampiezza delle oscillazioni e

$$(6) \quad \nu = \frac{K}{2\pi L}$$

la frequenza.

Posso ammettere che il corpo sia perfettamente omogeneo, di modo che ogni ione si trovi nelle stesse condizioni, e quindi K ed L siano le stesse per tutti gli ioni.

Invece, per l'ampiezza delle oscillazioni, che è indipendente da K ed L , supporrò che sia maggiore per le cariche minori, e precisamente pongo

$$(7) \quad a^2 e = \text{cost.}$$

Si osservi che con questa ipotesi non si ammette affatto, come sembra a prima giunta, la possibilità di oscillazioni infinitamente ampie, poichè secondo la teoria degli elettroni, e non può essere inferiore alla carica elementare e dell'elettrone, e quindi a ammette un limite superiore finito.

Di più, non solo deve essere $q \geq e$, ma addirittura

$$(8) \quad q = m e \quad (m \text{ intero positivo});$$

per cui, invece di (7), si può scrivere

$$(9) \quad m a^2 = \text{cost},$$

dove m è il numero degli elettroni che costituiscono lo ione oscillante con l'ampiezza a .

Allora tenendo conto delle (5), (6), la (3) dà, per l'energia di uno ione costituito di m elettroni e oscillante con la frequenza ν , il valore

$$(10) \quad E = m h \nu,$$

essendo

$$h = 2 \pi m a^2 e^2 L K$$

una costante che, in virtù di (9), è la stessa per tutti gli ioni.

La densità dell'energia raggianti di frequenza ν dovrà essere tale da non alterare l'energia degli ioni della stessa frequenza. Ora Planck ha dimostrato (1) che, affinché l'energia media \bar{E} di un risonatore (cioè di uno ione oscillante periodicamente) di frequenza ν rimanga costante, la densità u dell'energia raggianti deve essere

$$(12) \quad u = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \bar{E};$$

e si può ammettere che questa relazione valga anche nel nostro caso, quando l'energia media sia calcolata sull'insieme degli ioni di frequenza ν , cioè dividendo per il loro numero la loro energia complessiva.

Infatti, siccome l'intensità dell'irraggiamento (che vale $\frac{c u}{8 \pi}$) è uguale al rapporto fra il coefficiente di emissione e quello di assorbimento, ciò equivale ad ammettere che questi coefficienti in un punto del corpo, per una data frequenza, sono uguali alla media dei coefficienti analoghi dei singoli ioni; media che risulta uguale in tutti i punti, poichè la distribuzione delle varie specie di ioni in tutto il corpo si deve pensare non-ordinata (ungeordnet).

Rimane dunque da calcolare l'energia complessiva degli ioni di frequenza ν : il che potrà fare valendomi dell'ipotesi posta al n. 2, che cioè valga anche per gli ioni la equipartizione dell'energia.

Essendo il corpo alla temperatura assoluta T , ad ogni grado di libertà spetta l'energia cinetica $\frac{1}{2} \alpha T$, detta α la costante di Boltzmann. Ogni ione ha un solo grado di libertà: e poichè la sua energia, data dalla (3),

(1) loc. cit., pag. 124.

è precisamente il doppio della sua energia cinetica media, si è condotti ad assegnare ad ogni ione l'energia

$$E = \frac{2}{3} \alpha T = kT,$$

dove k è la stessa costante che compare nella (1).

Allora E risulta uguale per tutti gli ioni; e dalla (12) risulterebbe, senz'altro,

$$u = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} kT,$$

cioè la formula di Rayleigh.

Ma si deve osservare che questo modo di procedere non è esatto, poichè nella teoria cinetica dei gas si dimostra che non tutte le molecole posseggono esattamente l'energia αT , ma che questo è solo il valore medio dell'energia molecolare, l'esatta ripartizione della quale è assegnata dalla nota legge di Maxwell. E così dovrò ammettere che vi sono ioni che posseggono energia differente da kT , e che precisamente il loro numero sarà dato dalla legge di Maxwell.

Il valore di \bar{E} , da introdurre nella (12), va calcolato per i soli ioni di frequenza ν : e sarà precisamente

$$(13) \quad \bar{E} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^n m h \nu N_m,$$

detto N il loro numero totale, e N_m il numero di quelli che hanno l'energia $m h \nu$, cioè che sono costituiti da m elettroni. Se m variasse con continuità, la legge di Maxwell darebbe

$$N_m dm = -N de^{-\frac{m h \nu}{kT}};$$

ma siccome m non può essere che intero, sostituirò gli incrementi finiti ai differenziali, cioè

$$N_m \Delta m = -N \Delta e^{-\frac{m h \nu}{kT}},$$

vale a dire

$$(14) \quad N_m = N \left(e^{-\frac{m h \nu}{kT}} - e^{-\frac{(m+1) h \nu}{kT}} \right);$$

e quindi la (13) diviene

$$\bar{E} = h \nu \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\frac{m h \nu}{kT}},$$

ossia

$$(15) \quad \bar{E} = \frac{h \nu}{e^{\frac{h \nu}{kT}} - 1};$$

e quindi la densità dell'energia raggiante diventa

$$(16) \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{e^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

cioè si ottiene precisamente la formula di Planck.

4. Dunque, per l'irraggiamento di un corpo fittizio costituito nel modo spiegato al n. 2, è vera la formula di Planck; e poichè le ipotesi fatte non escono dal campo delle teorie classiche, e nella dimostrazione fatta nel n. 3 si ricorre solo ai principî della teoria elettromagnetica della luce di Maxwell, a quelli della teoria degli elettroni, e della teoria cinetica dei gas, rimane dimostrata la possibilità di ottenere la formula di Planck senza ipotesi dei *quanta*, o altre che contraddicano ai principî classici.

Siccome, insomma, l'intero sistema irraggiante immaginato ricade nel dominio del principio di Hamilton, mi pare che più non si possa asserire che esso conduca necessariamente alla formula di Rayleigh.

Questa asserzione — che, almeno nella forma così recisa che gli hanno dato alcuni scienziati (1), era realmente prematura, e ora, mi pare di aver dimostrato, è certo erronea — è stata giustificata solamente dalla dimostrazione di H. A. Lorentz (2), che è senza dubbio la più generale di tutte quelle finora date in base all'equipartizione. Ma essa non è completamente soddisfacente; in particolare, anch'essa porta ad equipartire l'*energia raggiante*. Ora io penso che ciò non sia conforme allo spirito della meccanica statistica; e questa mia modesta Nota avrà raggiunto il suo scopo se avrà almeno contribuito a far sorgere l'idea della possibilità di giungere a risultati conformi all'esperienza, applicando l'equipartizione in modo radicalmente diverso da quello seguito finora, applicandolo cioè esclusivamente a quella parte dell'energia che si può considerare come *cinetica*. Spero, del resto, di poter presto sviluppare maggiormente questa osservazione.

Mi sia infine permesso di rispondere ad un'ultima quistione: se cioè il calcolo, fatto in questa Nota, possa avere il significato di dimostrazione della (1). Vale a dire se esso, oltre a dimostrare che la (1) è compatibile col principio di Hamilton, dimostri anche che essa rappresenta proprio la densità dell'irraggiamento nero.

È noto che il Planck stesso dimostra la sua formula considerando un meccanismo di emissione affatto particolare, che non ha riscontro nella realtà fisica, e giustifica il procedimento osservando che, per la legge di Kirchhoff, la *u* è indipendente dalla costituzione del corpo. Potrei senz'altro far mia questa giustificazione; ma essa non è esente da una critica grave.

(1) P. es. Planck, in *Théorie du rayonn. et les quanta*, pag. 93.

(2) *Rapport sur l'applic. au rayonnement du théorème de l'équipartition de l'énergie*; *ibid.*, pp. 12-39.

La dimostrazione della legge di Kirchhoff è basata sulla termodinamica; quindi vale per tutti e soli quei corpi reali o fittizi, pei quali è vera la termodinamica. Dunque solo pei corpi costituiti da un numero enorme di particelle in moto disordinato, chè altrimenti entropia e temperatura non hanno significato. Planck invece considera un solo risonatore; la legge di Kirchhoff non si applica più, e non permette di asserire che esso irraggia come un corpo nero. È vero che il Planck definisce l'entropia di un risonatore ma dalla sua definizione non risulta punto chiaro che essa sia proprio la stessa entropia della termodinamica, o, meglio, che l'estendere ad essa il secondo principio non sia una nuova ipotesi, ancor più essenziale, nel metodo di Planck, di quella dei *quanta*. Questa critica esporrò più ampiamente in un prossimo lavoro nel quale vorrei mostrare come non sia lecito parlare di entropia, probabilità, di concetti statistici in breve, per l'irraggiamento considerato a sè, indipendentemente dal corpo che lo determina.

Tornando alla quistione posta, mi pare che, invece, al corpo fittizio da me considerato si possa applicare la termodinamica, poichè esso è costituito appunto in armonia coi principî della meccanica statistica; e allora si può forse ritenere che i nn. 2 e 3 contengano una dimostrazione della formula di Planck per l'irraggiamento nero.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei professori LOVISATO e MELI, e il vol. IV dell'opera del prof. B. HAYATA: *Icones Plantarum Formosanarum*.

Il Socio GRASSI offre il volume XIV degli *Atti* dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia redatti dal Socio BRIOSI, e parla della importanza di questa pubblicazione, ricca di interessanti lavori, dando notizia di quelli che nel volume attuale sono contenuti.

Il Presidente BLASERNA fa omaggio, a nome dell'autore prof. F. CALDARERA, della seconda edizione del primo volume del *Corso di Meccanica razionale*; lo stesso Presidente fa rilevare che trattasi di una edizione migliorata apparsa in questi giorni, della quale indica i principali capitoli, e che torna ad onore della ancor verde operosità del prof. CALDARERA.

MEMORIE

DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. NICITA. — *Il metodo aritmetico nel caso irriducibile dell'equazione di 3° grado*. Pres. dal Socio BLASERNA.