ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 marzo 1915.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota IV del Socio Vito Volterra.

42. Noi passeremo ora a studiare il caso in cui la lamina sia curva e sia soggetta ad un campo magnetico non uniforme. Il procedimento che seguiremo per giungere a questo caso generale, partendo dalle considerazioni già svolte per il caso della lamina piana soggetta ad un campo uniforme, consisterà nel decomporre la lamina in tanti elementi infinitesimi, ciascuno dei quali potremo riguardare come piano e soggetto ad un campo uniforme; ad ognuno di essi applicheremo, quindi, le formule fondamentali che svolgeremo opportunamente con l'impiego delle coordinate curvilinee. Ci sarà allora possibile passare da elemento ad elemento contiguo e considerare delle relazioni valide sull'intera superficie da cui ritrarremo come conseguenza le equazioni differenziali generali e le condizioni al contorno.

43. Consideriamo un elemento piano infinitesimo della lamina, adiacente ad un punto A, e riprendiamo le equazioni (1)

$$j_x = -K\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$j_y = -K\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

Sia ds un elemento lineare passante per A, e dn l'elemento normale, orientati fra loro come è stato detto nel § 1: cioè sia

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn}, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{dn}.$$

Avremo

$$j_n = j_x \frac{dx}{dn} + j_y \frac{dy}{dn} = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}\right),$$

ove j_n denota la densità della corrente normale a ds.

Facendo uso di un sistema di coordinate curvilinee u e v, avremo

$$j_n = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial n} + \lambda\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)\right). \tag{20}$$

Ora, se il quadrato dell'elemento lineare è

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

abbiamo (*)

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{F}\frac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{G}\frac{\partial v}{\partial s}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{F}\frac{\partial v}{\partial s}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(a')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{F}\frac{\partial u}{\partial n} + \mathrm{G}\frac{\partial v}{\partial n}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial n} + \mathrm{F}\frac{\partial v}{\partial n}\right); \end{aligned}\right.$$

e l'equazione (20) si scriverà

$$(20')\quad j_n = -\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} + \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial s} + \\ + \mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} - \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial s}.$$

(*) Si intenderà che la rotazione della linea $v = \text{cost}$ (presa nel senso in cui cresce la u) verso la linea $u = \text{cost}$ (presa nel senso in cui cresce la v), attraverso l'angolo minore di π, avvenga nello stesso verso in cui avviene, attraverso l'angolo retto, la rotazione della direzione positiva della linea s verso la direzione positiva della linea n. Supporremo inoltre di prendere qui, e nel seguito, il radicale $\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}$ positivo.

Supponiamo che la linea s coincida colla linea $u = \text{cost}$: allora l'equazione precedente diverrà

$$(21) \qquad j_{n_u} = \mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} - \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}},$$

ove j_{n_u} è la densità della corrente normale all'elemento della linea $u = \text{cost}$. Analogamente,

$$(21_1) \qquad j_{n_v} = -\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} - \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} + \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\ (*).$$

44. Tutte le formule precedenti valgono per un elemento piano infinitesimo. Ora, se la *lamina è curva* e si trova in un *campo magnetico costante o variabile*, per ogni elemento infinitesimo della superficie varranno le formule precedenti: solo dovremo supporre che K e $\lambda = \operatorname{tg}\beta$ cambino da elemento a elemento; in altri termini, le formule precedenti varranno nel caso più generale di una lamina metallica di forma qualsiasi situata in un campo magnetico qualunque, purchè si considerino K e λ funzioni note di u e v. Per calcolarle, dovremo tener conto delle formole (2) e (3) in cui dovremo sostituire punto per punto ad H la componente della intensità del campo magnetico nel senso normale alla superficie, la quale sarà variabile, sia per la diversa inclinazione della normale rispetto alla direzione del campo magnetico, sia per la variabilità di esso [1].

45. Riprendiamo ora la formula (20') valida su tutta la superficie, e formiamo

$$(22) \qquad \int_s j_n\, ds = \int_s \Bigg\{ -\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} - \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} + \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial s} + \\ + \mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} - \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial s}\Bigg\}\, ds,$$

(*) $\sqrt{\mathrm{G}}$ e $\sqrt{\mathrm{E}}$ debbono essere presi col segno positivo.

[1] Se il campo magnetico non è normale alla superficie, si producono delle azioni secondarie che fanno perdere alla lamina, per rapporto alla sua conducibilità, il carattere della isotropia (cfr. Winkelmann, Handb. der Physik, 2ª ediz., vol. V, pag. 458). Tali azioni costituiscono delle *perturbazioni* al fenomeno, come viene qui studiato. Ci si mette al riparo da queste perturbazioni disponendo la lamina secondo una *superficie di livello* nel campo magnetico, il quale in tal modo resulta normale alla lamina in ogni suo punto.

estesa ad una linea s qualunque chiusa, che non includa alcun elettrodo. Il primo membro sarà nullo e, per conseguenza,

$$(23)\qquad -\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]du+\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]dv$$

dovrà essere un differenziale esatto. Chiamandolo $d\mathrm{W}$ avremo quindi

$$(24)\qquad \begin{cases} -\sqrt{\mathrm{G}}\, j_{n_u}=-\mathrm{K}\left[\dfrac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]=-\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v} \\[2ex] \sqrt{\mathrm{E}}\, j_{n_v}=-\mathrm{K}\left[\dfrac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]=\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\,. \end{cases}$$

da cui segue che V soddisfa all'equazione differenziale

$$(\mathrm{F})\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]\right\}+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]\right\}=0.$$

Risolvendo le equazioni (24) rispetto a $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}$ si ottiene

$$-\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)}\left[\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\right]=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)}\left[\frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\right]=-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\,,$$

e, per conseguenza, W soddisfa, all'equazione differenziale

$$(\mathrm{G})\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)}\left[\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\right]\right\}+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)}\left[\frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}-\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\right]\right\}=0.$$

46. Ritorniamo alla formula (22), e supponiamo che l'integrazione sia estesa ad una linea aperta s. In virtù della (24), avremo

$$\int_s j_n\, ds = \int_s d\mathrm{W} = \mathrm{W}_2 - \mathrm{W}_1,$$

denotando con W_1 il valore di W all'origine dell'arco s, e con W_2 il valore all'altro estremo dell'arco stesso.

Ne segue che, *lungo le linee di corrente*, W *sarà costante*; e quindi, *lungo tutte le porzioni libere ed isolate del contorno*, W *sarà costante*, mentre *lungo tutti gli elettrodi di resistenza trascurabile*, V *sarà costante*.

Se supponiamo che non esistano forze elettromotrici interne nella lamina, V *sarà una funzione monodroma*, mentre W *resulterà polidroma percorrendo un ciclo chiuso qualsiasi che racchiude* [1] *degli elettrodi da cui entra nella lamina una quantità totale di elettricità diversa da zero*.

Se la lamina è semplicemente connessa e tutti gli elettrodi sono al contorno, W sarà evidentemente monodroma.

Alla funzione W daremo il nome di *funzione delle correnti*.

47. L'espressione di j_n [formula (20′)] può trasformarsi in più modi. Valendosi infatti delle (24), potremo scrivere

$$(20'') \qquad j_n = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial s},$$

e, applicando invece le (α'), avremo

$$(20''') \qquad j_n = -\mathrm{K}\left\{\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \frac{\lambda\left(\mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} - \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right)}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} + \frac{\lambda\left(\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right)}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\right)\frac{\partial v}{\partial n}\right\}.$$

Finalmente, sviluppando la (20″), cioè

$$j_n = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},$$

e tenendo conto delle (α'), si trova

$$(20^{\mathrm{IV}}) \qquad j_n = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left\{\left(\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial n} + \left(\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial n}\right\}.$$

[1] Alla parola *racchiude degli elettrodi* bisogna dare un senso generale intendendo tutti gli elettrodi che giacciono da una stessa parte della linea chiusa.

Le formule (21) e (21_1) possono ancora scriversi, tenendo presente le (24),

$$j_{n_u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial W}{\partial v}, \quad j_{n_v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial W}{\partial u}. \tag{21'}$$

Chiamiamo j_u e j_v le proiezioni ortogonali della corrente nelle direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$; se ne otterranno subito i valori facendo nella (20‴) coincidere successivamente n con le direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$, ed avremo

$$\left\{\begin{aligned} j_u &= -\frac{K}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial V}{\partial v} + \lambda \frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) \\ j_v &= -\frac{K}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial V}{\partial u} - \lambda \frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right), \end{aligned}\right. \tag{25}$$

e, mediante W, le stesse quantità si esprimeranno colle formule:

$$j_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{G\frac{\partial W}{\partial u} - F\frac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right), \quad j_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{F\frac{\partial W}{\partial u} - E\frac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right). \tag{25'}$$

Decomponiamo finalmente la corrente secondo le direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$: troveremo, come componenti,

$$\left\{\begin{aligned} i_u &= -\frac{K\sqrt{G}}{EG - F^2}\left(E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u} + \lambda\sqrt{EG - F^2}\frac{\partial V}{\partial u}\right) \\ i_v &= -\frac{K\sqrt{E}}{EG - F^2}\left(G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v} - \lambda\sqrt{EG - F^2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) \end{aligned}\right. \tag{26}$$

che, espressi mediante W, divengono

$$i_u = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial W}{\partial u}, \quad i_v = -\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial W}{\partial v}. \tag{26'}$$

Da qualunque gruppo di queste formule si ricava il quadrato della intensità della corrente che viene espresso da

$$\left\{\begin{aligned} j^2 &= K^2(1 + \lambda^2)\left(\frac{E\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + G\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}\right) \\ j^2 &= \frac{E\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} + G\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Queste formole si possono scrivere nel modo seguente, impiegando il simbolo del parametro differenziale del primo ordine,

$$(27')\qquad \begin{cases} j^2 = K^2(1+\lambda^2)\,\Delta_1 V \\ j^2 = \Delta_1 W\,. \end{cases}$$

48. Le espressioni ottenute per j_n ci forniscono sotto altre forme la condizione $j_n = 0$, lungo le porzioni libere ed isolate del contorno. Così, per esempio, servendoci della formula (20‴), potremo scrivere la condizione stessa mediante la equazione

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u} - \lambda\,\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial n} + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \lambda\,\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\frac{\partial v}{\partial n} = 0\,.$$

49. Supponiamo, adesso, che la lamina sia omogenea, e manchi il campo magnetico; avremo $K = \mathrm{cost}$ e $\lambda = 0$: quindi le equazioni (F) e (G) diverranno

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\dfrac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} + \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\dfrac{G\dfrac{\partial W}{\partial u} - F\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} + \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{E\dfrac{\partial W}{\partial v} - F\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} = 0 \end{cases}$$

e potranno anche scriversi, facendo uso del simbolo del parametro differenziale del 2° ordine

$$(\beta')\qquad \Delta_2 V = 0 \qquad \Delta_2 W = 0\,.$$

V e W saranno quindi, come doveva prevedersi, due funzioni armoniche sulla superficie. Inoltre le (24) diverranno

$$(\gamma)\qquad \frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\partial \dfrac{W}{K}}{\partial v}\,, \qquad \frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} = -\frac{\partial \dfrac{W}{K}}{\partial u}\,.$$

Le condizioni (β') sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè V e W siano funzioni armoniche sulla superficie; le (γ), affinchè

$$V + i\frac{W}{K}$$

sia una variabile complessa sulla superficie [1].

[1] Cfr. Beltrami, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*. Opere, vol. I, pag. 318.

Ora, allorchè $K\lambda$ non è costante, le equazioni (F) e (G) differiscono essenzialmente dalle (β), e perciò V e W non sono funzioni armoniche sulla superficie.

Invece, nel caso delle lamine piane omogenee in un campo magnetico costante, il potenziale V si conserva armonico, anche quando agisce il campo magnetico (cfr. § 1); soltanto cambia la condizione a cui deve soddisfare al contorno nelle regioni di esso libere ed isolate. Dunque si manifesta una differenza sostanziale, nel caso che adesso trattiamo, rispetto ai precedenti: cioè, l'azione del campo magnetico, non solo muta le condizioni al contorno a cui deve verificare il potenziale, ove il contorno stesso è libero ed isolato, ma altera intimamente la natura del potenziale in tutta l'area occupata dalla lamina.

È facile stabilire, nel caso in cui K e λ sono costanti, la relazione che passa tra la funzione delle correnti e la funzione fondamentale U (§ 14).

Avremo infatti

$$W = KU',$$

ove U' è la funzione armonica coniugata della funzione U.

50. Riassumendo i resultati ottenuti, possiamo dire che, allorquando si passa dalla lamina piana alla lamina curva omogenea o non omogenea in un campo magnetico costante o variabile, si passa (dal punto di vista analitico) dalla equazione differenziale di Laplace a nuove equazioni differenziali di carattere diverso [le equazioni (F) e (G)]. Delle quattro funzioni (*potenziale*, *funzione fondamentale* e loro *coniugate*), due sole si conservano e cioè il *potenziale* e quella che abbiamo chiamato la *funzione delle correnti*. L'una e l'altra di queste perdono però il carattere di funzioni armoniche sulla superficie occupata dalla lamina: ed anzi è questa la ragione per la quale le altre due funzioni cessano di sussistere, in quanto che il potenziale e la funzione delle correnti non essendo armoniche, cioè non avendo il secondo parametro differenziale nullo, ma soddisfacendo invece alle equazioni (F) e (G), non possono avere funzioni coniugate nel senso della teoria delle funzioni di variabili complesse sopra una superficie.

Da tutto ciò discende che il principio degli elettrodi puntiformi al contorno (§ 23) non sussiste più nel caso attuale; come pure non vale più il principio che il potenziale rimane inalterato nel caso di lamine più volte connesse, allorchè le linee che formano il contorno sono elettrodi di resistenza trascurabile, su cui il valore del potenziale si mantiene inalterabile (§ 30).

51. Riconosciute così le essenziali diversità analitiche che si presentano secondochè si tratta del caso precedentemente svolto della lamina piana uniforme nel campo magnetico costante, o del caso generale che adesso si esamina (sebbene quest'ultimo si sia derivato dal precedente), passiamo a

mostrare l'esistenza d'un principio fondamentale di carattere invariantivo: *il principio generale di reciprocità* (vedi §§ 11, 12, 13, 28).

Dalle (20'), denotando con V_1 una funzione qualsiasi, e rappresentando con S il contorno (formato da una o più linee) di una parte σ della lamina, ove V e V_1 sono regolari, segue

$$\text{(28)}\quad \int_S V_1 j_n \, dS = \int_S \Bigg\{ -K V_1 \left[\frac{E \dfrac{\partial V}{\partial v} - F \dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} + \lambda \frac{\partial V}{\partial u} \right] \frac{\partial u}{\partial s} + $$
$$ + K V_1 \left[\frac{G \dfrac{\partial V}{\partial u} - F \dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} - \lambda \frac{\partial V}{\partial v} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \Bigg\} dS$$
$$= \int_\sigma \frac{K}{\sqrt{EG - F^2}} \Bigg\{ \frac{G \dfrac{\partial V}{\partial u} \dfrac{\partial V_1}{\partial u} - F \left(\dfrac{\partial V_1}{\partial u} \dfrac{\partial V}{\partial v} + \dfrac{\partial V}{\partial u} \dfrac{\partial V_1}{\partial v} \right) + E \dfrac{\partial V}{\partial v} \dfrac{\partial V_1}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} + $$
$$ + \lambda \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial V_1}{\partial v} - \frac{\partial V_1}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \right) \Bigg\} d\sigma ,$$

ove si è supposto di prendere n diretto verso l'interno di σ, e quindi si è fissata implicitamente la direzione s.

Denotiamo con $\varDelta_1 V V_1$ il *parametro differenziale misto* o *intermedio* delle funzioni V e V_1, cioè

$$\varDelta_1 V V_1 = \frac{G \dfrac{\partial V}{\partial u} \dfrac{\partial V_1}{\partial u} - F \left(\dfrac{\partial V_1}{\partial u} \dfrac{\partial V}{\partial v} + \dfrac{\partial V}{\partial u} \dfrac{\partial V_1}{\partial v} \right) + E \dfrac{\partial V}{\partial v} \dfrac{\partial V_1}{\partial v}}{EG - F^2}$$

e scriviamo il determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial u} , & \dfrac{\partial V}{\partial v} \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial u} , & \dfrac{\partial V_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{d(V, V_1)}{d(u, v)} .$$

Si riconosce immediatamente che $\varDelta_1 V V_1$ è simmetrico rispetto a V e V_1, mentre il determinante $\dfrac{d(V, V_1)}{d(u, v)}$ cambia segno scambiando V con V_1.

La equazione (28) potrà scriversi

$$\text{(H)}\quad \int_S V_1 j_n \, dS = \int_\sigma K \left(\varDelta_1 V V_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(V, V_1)}{d(u, v)} \right) d\sigma .$$

52. Supponiamo, ora, che V_1 corrisponda ad un potenziale elettrico di correnti distribuite nella lamina quando il *campo magnetico è invertito*. In tale ipotesi dovremo mantenere inalterato K in ogni punto, e cambiare segno a λ.

Se in questo caso denotiamo con j_{1n} la densità della corrente normale ad S, e vogliamo stabilire la formula corrispondente alla precedente, dovremo scambiare nel secondo membro V con V_1, il che non altera il parametro simmetrico $\Delta_1 V V_1$, ma cambia segno al determinante $\dfrac{d(V, V_1)}{d(u, v)}$; però il termine corrispondente è moltiplicato per λ, il quale muta anch'esso segno per la inversione del campo, quindi i due cambiamenti di segno manterranno inalterato anche il secondo termine, onde avremo

$$(H') \qquad \int_S V j_{1n}\, dS = \int_\sigma K\left(\Delta_1 V V_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(V, V_1)}{d(u, v)}\right) d\sigma,$$

e quindi

$$(L) \qquad \int_S (V j_{1n} - V_1 j_n)\, dS = 0 .$$

Se confrontiamo la formula (D) con la formula (L), riconosciamo che da questa possono ricavarsi le stesse conseguenze che abbiamo dedotto da quella, ed in particolare i *teoremi di reciprocità*.

53. Per esempio, supponiamo che, con il campo magnetico diretto, la corrente di intensità J entri da un elettrodo puntiforme A ed esca da un elettrodo B; e con il campo magnetico invertito la corrente J_1 entri da A_1 ed esca da B_1. Prendiamo S formato dal contorno s della lamina e da quattro circonferenze geodetiche s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1} aventi i centri in A, B, A_1 e B_1. Noi porremo la condizione che, almeno quando esse sono abbastanza piccole, prendendo n dall'interno all'esterno delle circonferenze stesse, j_n sia positivo su s_a, negativo su s_b e j_{1n} sia positivo su s_{a_1} e negativo su s_{b_1}; mentre V e V_1 siano finiti o divengano infiniti di ordine minore ad un numero più piccolo di 1.

Poichè sopra s, j_n e j_{1n} sono nulli, avremo

$$\int_{s_a} j_{1n} V ds_a + \int_{s_b} j_{1n} V ds_b + \int_{s_{a_1}} j_{1n} V ds_{a_1} + \int_{s_{b_1}} j_{1n} V ds_{b_1}$$
$$- \int_{s_a} j_n V_1\, ds_a - \int_{s_b} j_n V_1\, ds_b - \int_{s_{a_1}} j_n V_1\, ds_a - \int_{s_{b_1}} j_n V_1\, ds_{b_1} = 0,$$

da cui si ricava, passando al limite col far impiccolire indefinitamente i quattro circoli geodetici,

$$J_1(V_{A_1} - V_{B_1}) = J(V_{1A} - V_{1B}),$$

e quindi, se $J_1 = J$,

$$V_{A_1} - V_{B_1} = V_{1A} - V_{1B}.$$

Nello stesso modo, *tutti i teoremi di reciprocità* (relativi ad elettrodi di aree finite interni e di resistenze trascurabili o situati al contorno e pure di resistenze trascurabili) *si estendono, dal caso della lamina piana situata in un campo uniforme, al caso di una lamina curva in un campo uniforme o non uniforme.*

54. L'equazione (L) può scriversi ancora,

$$\int_S \left(V \frac{dW_1}{ds} - V_1 \frac{dW}{ds} \right) dS = 0:$$

ossia $VdW_1 - V_1 dW$ *sarà un differenziale esatto*, e questo sarà un altro modo di esprimere il teorema di reciprocità.

55. Poniamo, nella (H), $V_1 = V$, avremo allora

$$\text{(M)} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma K \varDelta_1 V d\sigma ,$$

giacchè il determinante si annulla, ed il parametro misto diviene quello del primo ordine.

La stessa formula può scriversi

$$\text{(M')} \qquad \int_S V \frac{dW}{ds} dS = \int_\sigma K \varDelta_1 V d\sigma ,$$

o anche

$$\text{(M'')} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K(1+\lambda^2)} j^2 \, d\sigma ,$$

oppure

$$\text{(M''')} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K(1+\lambda^2)} \varDelta_1 W d\sigma .$$

I primi membri delle precedenti equazioni misurano la quantità di energia che penetra nell'area σ attraverso il contorno, nell'unità di tempo. Se quindi prendiamo σ infinitamente piccolo, sarà

$$\frac{1}{K(1+\lambda^2)} j^2 \, d\sigma$$

la quantità di calore Joule che si sviluppa in ogni elemento superficiale della lamina.

Dalla (M') poi segue che, se V è nullo in una certa porzione del contorno S, e nelle rimanenti parti W è costante. V è nulla entro tutta l'area σ. Di qui resulta che, se certe porzioni del contorno sono degli elettrodi di resistenza trascurabile ove è noto il valore del potenziale o la intensità della corrente che penetra nella lamina, e le rimanenti sono libere ed isolate, la distribuzione delle correnti sarà determinata (cfr. §§ 3 e 4).