ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Sulla risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra.* Nota del Corrisp. O. TEDONE.

I.

Il problema della integrazione indefinita dell'equazione

$$\sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + k\varphi = 0 \tag{1}$$

col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra, conduce, nel modo più naturale, a porre la quistione di determinare la funzione $\varphi(\tau)$ dall'equazione integrale

$$\int_{t_0}^t \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n\, \mathrm{I}_{n+\lambda}\left[\sqrt{k}\,(t-\tau)\right] d\tau = \Phi(t) \tag{2}$$

in cui $\Phi(t)$ è una funzione nota tale che l'equazione integrale stessa sia possibile, $n = \frac{p-3}{2}$ e, per ogni valore di ν che non sia intero negativo,

$$\mathrm{I}_\nu(z) = \sum_0^\infty {}_s \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Pi(\nu+s)}$$

con $\Pi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha\, dx$, per $\alpha > -1$, e $\Pi(\alpha+1) = (\alpha+1)\Pi(\alpha)$.

Nell'equazione (2), inoltre, λ non risulta, *a priori*, assoggettato ad alcuna limitazione, e potrebbe, a rigore, essere un numero qualunque; ma, per i bisogni della integrazione della (1), vien naturale ed è più che sufficiente il supporlo intero. Infine, lasciando da parte il caso speciale di $p=1$, il numero n, appena è $p>2$, è sempre positivo ed eguale ad un numero intero, ovvero alla metà di un intero dispari, mentre, per $p=2$, è $n=-\frac{1}{2}$.

In alcune Note, precedentemente pubblicate in questi stessi Rendiconti, abbiamo avuto occasione di risolvere l'equazione (2) in numerosi casi, avendo di mira, principalmente, la integrazione della (1). E nelle ricerche contenute nelle citate Note, il caso di $p=2$, $(n=-\frac{1}{2})$ si presentava con caratteri d'eccezione e di maggiori difficoltà, mentre, d'altra parte, dà luogo ad equazioni integrali notevolissime come la seguente:

$$\int_{t_0}^t \varphi(\tau)\,\frac{\mathrm{Sen}\left[\sqrt{k}\,(t-\tau)\right]}{t-\tau}\, d\tau = \Phi(t), \tag{2'}$$

dove Sen è, al solito, il simbolo di seno iperbolico, e che si ottiene dalla (2) per $n=-\frac{1}{2}$ e $\lambda=0$. Ci siamo perciò indotti a riprendere e ad approfondire lo studio dell'equazione (2), imponendoci, *a priori*, le sole limitazioni che λ sia un numero intero e che n sia un numero intero, ovvero la metà di un intero dispari, positivo, o negativo; e con l'altre limitazioni, naturali, che, per n intero, sia $n+\lambda \geq 0$ e che, in ogni caso,

$$(t-\tau)^n \, I_{n+\lambda}\left[\sqrt{k}(t-\tau)\right]$$

sia finito per $t=\tau$. Nella presente Nota riportiamo quelli dei risultati ottenuti che ci sono parsi non privi di interesse. Ma dobbiamo subito avvertire che i ripetuti sforzi fatti per ottenere, con un procedimento finito, la soluzione della (2′) e di quelle altre equazioni che alla (2′) si possono ricondurre, sono riusciti sempre vani. D'altra parte la teoria generale delle equazioni integrali non sembra sufficientemente avanzata, così da poterci dare risposta alla domanda se un tale procedimento finito, nel caso della (2′), sia, o no, possibile.

Per maggiore semplicità supporremo, nel sèguito, sempre $k=1$.

II.

Formole fondamentali.

1. Sono notissime e, del resto, si dimostrano con tutta facilità, le formole fondamentali seguenti della teoria delle funzioni di Bessel:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dz}\left[z^{\nu}\, I_{\nu}(z)\right]=z^{\nu}\, I_{\nu-1}(z) \quad , \quad \frac{d}{dz}\left[z^{-\nu}\, I_{\nu}(z)\right]=z^{-\nu}\, I_{\nu+1}(z)$$

le quali valgono per ogni valore di ν, diverso da zero, anche negativo, purchè non sia intero negativo. Per $\nu=0$, le (A) sono sostituite dall'unica relazione

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \frac{d\, I_0(z)}{dz}=I_1(z)\,.$$

Le (A) dànno luogo immediatamente alle altre:

$$\text{(A}_1\text{)} \qquad I'_{\nu}(z)+\frac{\nu}{z}\, I_{\nu}(z)=I_{\nu-1}(z) \quad , \quad I'_{\nu}(z)-\frac{\nu}{z}\, I_{\nu}(z)=I_{\nu+1}(z)\,,$$

nelle quali gli accenti indicano delle derivate, e queste ultime, a loro volta, per somma e per differenza, dànno luogo alle:

$$\text{(A}_2\text{)} \qquad 2\, I'_{\nu}(z)=I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z) \quad , \quad \frac{2\nu}{z}\, I_{\nu}(z)=I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)\,.$$

Dalle (A) discendono pure le altre formole notevolissime:

$$(\mathrm{A}_3)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dz^2}-1\right)[z^\nu \mathrm{I}_\nu(z)] = (2\nu-1)\, z^{\nu-1}\, \mathrm{I}_{\nu-1}(z)\,, \\[2ex] \left(\dfrac{d^2}{dz^2}-1\right)[z^{-\nu} \mathrm{I}_\nu(z)] = -(2\nu+1)\, z^{-(\nu+1)}\, \mathrm{I}_{\nu+1}(z)\,; \end{cases}$$

e, da queste, quando ν è un intero positivo, si ottiene:

$$(\mathrm{A}_4)\quad \begin{cases} \mathrm{I}_0(z) = \dfrac{1}{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2\nu-1)}\left(\dfrac{d^2}{dz^2}-1\right)^\nu [z^\nu \mathrm{I}_\nu(z)]\,, \\[2ex] z^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(z) = \dfrac{(-1)^\nu}{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2\nu-1)}\left(\dfrac{d^2}{dz^2}-1\right)^\nu \mathrm{I}_0(z)\,. \end{cases}$$

2. Alle precedenti formole faremo ora seguire un'altra serie di formole che, in certo modo, possono considerarsi come una generalizzazione delle prime. Poniamo

$$(3)\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n\, \mathrm{I}_m(t-\tau)\, d\tau = \Phi_{n\,,\,m}(t)\,,$$

e supponiamo che, se m è intero, sia anche $m \geq 0$. Derivando l'equazione precedente, rispetto a t, nell'ipotesi, dapprima, che $m+n>0$, in due modi diversi, considerando $(t-\tau)^n\,\mathrm{I}_m(t-\tau)$, una volta come prodotto di $(t-\tau)^{n-m}$ e di $(t-\tau)^m\,\mathrm{I}_m(t-\tau)$, un'altra volta come prodotto di $(t-\tau)^{n+m}$ e di $(t-\tau)^{-m}\,\mathrm{I}_m(t-\tau)$, e tenendo conto della (A), si trova:

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \Phi'_{n\,,\,m} = (n-m)\,\Phi_{n-1\,,\,m} + \Phi_{n\,,\,m-1}\,, \\ \Phi'_{n\,,\,m} = (n+m)\,\Phi_{n-1\,,\,m} + \Phi_{n\,,\,m+1}\,; \end{cases}$$

e queste formole sono equivalenti alle altre:

$$(\mathrm{B}_1)\quad \begin{cases} (n+m)\,\Phi_{n\,,\,m-1} - 2m\,\Phi'_{n\,,\,m} - (n-m)\,\Phi_{n\,,\,m+1} = 0\,, \\ 2m\,\Phi_{n-1\,,\,m} = \Phi_{n\,,\,m-1} - \Phi_{n\,,\,m+1}\,. \end{cases}$$

Le (B) restano valide anche nell'ipotesi di $n=m$; nella quale ipotesi la prima delle (B), o delle (B_1), si riduce semplicemente a

$$(\mathrm{B}')\qquad \Phi'_{n\,,\,n} = \Phi_{n\,,\,n-1}\,.$$

Se poi è $n+m=0$, abbiamo

$$(\mathrm{B}'')\qquad \Phi'_{-n\,,\,n} = \Phi_{-n\,,\,n+1} + \frac{1}{2^n\,\Pi(n)}\,\varphi(t)\,.$$

Citiamo ancora le formole seguenti, che sono analoghe alle (A_3):

$$(B_2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dt^2}-1\right)\Phi_{n,n}(t)=(2n-1)\,\Phi_{n-1,n-1}(t)\,, & n>0\,, \\ \left(\dfrac{d^2}{dt^2}-1\right)\Phi_{-n,n}(t)=-(2n+1)\,\Phi_{-(n+1),n+1}(t)+\dfrac{1}{2^n\,\Pi(n)}\,\varphi'(t)\,. \end{cases}$$

3. Nel caso in cui gli indici delle funzioni di Bessel sono interi positivi, o nulli, accanto alle relazioni (A), (A_1), (A_2), (A_3) fra queste funzioni e le loro derivate, ed alle quali si può dare il nome di formole differenziali, altre ne sussistono alle quali si potrebbe dare, ci pare, molto opportunamente, il nome di formole integrali e che si possono ottenere combinando le citate formole differenziali con l'identità fondamentale

$$(C)\qquad I_1(x_1-x_0)=\frac{\partial}{\partial x_1}I_0(x_1-x_0)=\int_{x_0}^{x_1}I_0(x_1-x)\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx$$

da noi dimostrata [1]. Di tutte le formole che così potrebbero ricavarsi, noi terremo conto soltanto delle più importanti e che si mostreranno utili a raggiungere lo scopo propostoci. Derivando successivamente la (C), rispetto ad x_1, e tenendo conto della (A_2), si trova

$$(C_1)\qquad I_n(x_1-x_0)=2\,I'_{n-1}(x_1-x_0)-I_{n-1}(x_1-x_0)= \\ =\int_{x_0}^{x_1}I_{n-1}(x_1-x)\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx\,;$$

e da questa, ancora con l'aiuto delle stesse relazioni (A_2), discende

$$(C_2)\qquad n\,\frac{I_n(x_1-x_0)}{x_1-x_0}=2(n-1)\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_{n-1}(x_1-x_0)}{x_1-x_0}-(n-2)\,\frac{I_{n-2}(x_1-x_0)}{x_1-x}= \\ =(n-1)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_{n-1}(x_1-x)}{x_1-x}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx\,.$$

Notiamo pure la formola

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-1\right)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx= \\ =\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_1(x_1-x_0)}{x_1-x_0}-(2n+1)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_{n+1}(x_1-x)}{(x_1-x)^{n+1}}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx\,.$$

[1] *Sulla integr. dell'equaz. delle onde smorzate* ecc. Questi Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 1° sem.

Da essa, col metodo dell' induzione completa, ricaviamo la formola generale seguente:

$$(\mathrm{C}_3)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{I}_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{\mathrm{I}_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx =$$

$$= {\sum_0^{n-1}}'_i \frac{(-1)^i}{2^{n-i-1}(n-i-1)!\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots(2n-2i-1)}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-1\right)^i \frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{\mathrm{I}_1(x_1-x_0)}{x_1-x_0}\,,$$

nella quale l'accento sulla sommatoria sta ad indicare che l'ultimo termine, in essa, dev'essere ancora moltiplicato per due. Dalla (C_3), con l'aiuto della seconda delle (A_3), si deduce anche l'altra formola

$$(\mathrm{C}_4)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{I}_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{\mathrm{I}_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx =$$

$$= {\sum_1^{n}}'_i \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2i-1)}{2^{n-i}(n-i)!\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots(2n-2i+1)}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{\mathrm{I}_i(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^i}\,.$$

4. Si possono costruire formole integrali anche tra le $\Phi_{n\,,\,m}$. Qui ricorderemo soltanto la formola seguente, da noi dimostrata in un'altra Nota [1],

$$(\mathrm{D})\qquad \Phi_{0\,,\,n-1}(t) = 2\Phi'_{0\,,\,n}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{0\,,\,n}(\tau)\,\frac{\mathrm{I}_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,,$$

e la sua inversa

$$(\mathrm{D}_1)\qquad \Phi_{0\,,\,n}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi_{0\,,\,n-1}(\tau)\,\frac{\mathrm{I}_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,.$$

III.

Studio, per $n \geqq m$, dell' equazione

$$(4)\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n\,\mathrm{I}_m(t-\tau)\,d\tau = \Phi_{n\,,\,m}(t)\,.$$

1. Nella ipotesi che sia $n \geqq m$, la equazione (4) si risolve, tanto nel caso in cui n ed m sieno interi, quanto in quello in cui n ed m sieno entrambi metà di numeri dispari.

Supponiamo dapprima n ed m interi e che quindi sia anche $m \geqq 0$. Se $m = n$, l'equazione (4) è stata già da noi risoluta nella Nota ultimamente citata. Da $\Phi_{n\,,\,n}$ si ricava $\Phi_{0\,,\,0}$ con la formola

$$(5)\qquad \Phi_{0\,,\,0} = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\mathrm{I}_0(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)^n \Phi_{n\,,\,n}$$

(1) *Su l'inversione di alcuni integrali* ecc. Questi Rend.., vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem.

e, trovata $\Phi_{0,0}$, si ha poi subito

$$(5') \qquad \varphi(t) = \Phi'_{0,0}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau .$$

Ciò posto, è chiaro, per quello che ora abbiamo ricordato, che l'equazione (4) sarà risoluta se avremo il modo di calcolare $\Phi_{n,n}$ per mezzo di $\Phi_{n,m}$. A questo scopo notiamo che, supposto noto $\Phi_{n,n}$, dalla (B') abbiamo $\Phi_{n,n-1} = \Phi'_{n,n}$, mentre la prima delle (B_1), ponendo, per m, in questa ultima formola, successivamente, $n-1, n-2, \ldots, m+1$, ci dà, nello stesso ordine, $\Phi_{n,n-2}, \Phi_{n,n-3}, \ldots, \Phi_{n,m}$. $\Phi_{n,m}$ si può quindi esprimere per mezzo di $\Phi_{n,n}$ con l'aiuto di un'espressione differenziale, lineare, a coefficienti costanti. Ne viene che, inversamente, dato $\Phi_{n,m}$, si otterrà $\Phi_{n,n}$ risolvendo un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto. Il problema è determinato, potendosi ricavare dalla definizione stessa di $\Phi_{n,n}$ i valori che questa funzione e le sue derivate assumono per $t = t_0$. La quistione che ci siamo proposta, si può dunque considerare risoluta.

Si tratti, per es., di risolvere l'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^2\, I_0(t-\tau)\, d\tau = \Phi_{2,0}(t) .$$

Abbiamo allora

$$\Phi_{2,1} = \Phi'_{2,2} \quad , \quad 3\Phi_{2,0} = 2\Phi'_{2,1} + \Phi_{22} = 2\Phi''_{2,2} + \Phi_{22} ,$$

e perciò $\Phi_{2,2}$ è la soluzione dell'equazione

$$\Phi''_{2,2} + \frac{1}{2}\Phi_{2,2} = \frac{3}{2}\Phi_{2,0}$$

che si annulla, insieme con la sua derivata, per $t = t_0$: ossia è

$$\Phi_{2,2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{t_0}^{t} \Phi_{2,0}(\tau) \operatorname{sen} \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\, d\tau .$$

Da $\Phi_{2,2}$ si ricava poi la funzione $\varphi(t)$, con l'aiuto delle (5) e (5').

2. Lo stesso metodo precedente vale a risolvere l'equazione (3) anche nel caso in cui m ed n sono entrambi metà di numeri dispari, nella ipotesi, sempre, di $n \geq m$.

Se infatti è $m = n$, come abbiamo dimostrato nella stessa Nota ultimamente citata, è

$$(6) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\,.\,4 \ldots (2n-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)^{n+\frac{1}{2}} \Phi_{n,n}(t) .$$

Se poi, invece, $n > m$, come precedentemente, si determinerà, dapprima, $\Phi_{n,n}$ per mezzo di $\Phi_{n,m}$, e quindi la funzione $\varphi(t)$ con l'aiuto della (6). Nel caso, anzi, che ora consideriamo può darsi ad m anche un valore negativo purchè, naturalmente, sia $n + m \geq 0$, chè il procedimento non soffre eccezioni.

Si tratti, per un es., di risolvere l'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^2\,\mathrm{Sen}\,(t-\tau)\,d\tau = \Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}\,.$$

In questo caso $\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}$ è la soluzione dell'equazione

$$\Phi''_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} = \frac{4}{3}\Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}$$

che si annulla, insieme con la derivata, per $t = t_0$: ed è perciò

$$\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{t_0}^{t} \Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}(\tau)\,\mathrm{sen}\,\frac{t-\tau}{\sqrt{3}}\,d\tau\,,$$

Dall'espressione precedente di $\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}$ ricaviamo poi la funzione $\varphi(t)$ con l'aiuto della (6).

IV.

Risoluzione dell'equazione (4) per n ed m interi e $0 \leq n < m$.

1. Quando $n = 0$, ed m è un intero positivo, l'equazione (4) è stata da noi risoluta nell'ultima Nota più volte citata, con l'aiuto della (D). Possiamo dunque lasciare da parte questo caso, e supporre senz'altro che sia $n > 0$. Vogliamo però, prima, notare che, se oltre di $\Phi_{n,m}$, fosse nota $\Phi_{n,m-1}$, ovvero $\Phi_{n,m+1}$, la prima delle (B_1) ci darebbe il modo di calcolare tutte le Φ col primo indice eguale ad n. Ed allora, com'è stato osservato in altro posto [1], con l'aiuto della seconda delle (B_1), si potrebbero dedurre anche tutte le Φ col primo indice minore di n. In particolare si potrebbero calcolare $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$, dalle quali si dedurrebbe, immediatamente,

$$\varphi(t) = \Phi'_{0,0}(t) - \Phi_{0,1}(t)\,.$$

[1] *Sull'integrazione delle equazioni* ecc. Questi Rendiconti, vol. XXIII, ser. 5ª, 2° sem., pag. 154.

Si può concludere allo stesso modo anche nel caso in cui, oltre di $\Phi_{n,m}$, forse nota un'altra qualunque Φ con indici interi. Però, in questa ipotesi più larga, per determinare $\varphi(t)$ bisogna anche risolvere un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti con termine noto, come ci si convince facilmente.

Supponiamo, ora, che sia data soltanto $\Phi_{n,m}$ con $0 < n < m$ ed n ed m interi. Per quello che è stato precedentemente detto, il problema della determinazione di $\varphi(t)$, in questo caso, si può ricondurre alla determinazione di $\Phi_{n,m-1}$, ovvero di $\Phi_{n,m+1}$. Proponiamoci di calcolare $\Phi_{n,m-1}$. Assunta questa quantità, momentaneamente, come nota, possiamo calcolare, come sopra è stato indicato, $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$. Ricordiamo, quindi, che fra queste due ultime espressioni sussistono le due relazioni seguenti, inverse una dell'altra:

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Phi_{0,0} &= 2\Phi'_{0,1} - \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,1}(\tau)\, \frac{\mathrm{I}_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau\,, \\
\Phi_{0,1} &= \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau)\, \frac{\mathrm{I}_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau\,,
\end{aligned}
\right.
$$

e notiamo che $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$ sono, ciascuna, somma di un'espressione differenziale lineare a coefficienti costanti di $\Phi_{n,m-1}$, e di un'altra tale espressione di $\Phi_{n,m}$. Con integrazioni per parti si possono ridurre quelle parti degli integrali

$$
\int_{t_0}^{t} \Phi_{0,1}(\tau)\, \frac{\mathrm{I}_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau \quad \text{e} \quad \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau)\, \frac{\mathrm{I}_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau\,,
$$

che contengono $\Phi_{n,m-1}$, alla somma di una espressione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, di $\Phi_{n,m-1}$ stessa, e di un termine proporzionale a

$$
\int_{t_0}^{t} \Phi_{n,m-1}(\tau)\, \frac{\mathrm{I}_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau\,.
$$

Eliminando questo integrale fra le due equazioni (7), così trasformate, si ottiene un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto, in $\Phi_{n,m-1}$ e dalla quale quest'ultima funzione si potrà determinare.

Illustreremo il metodo ora esposto applicandolo al caso particolare della risoluzione dell'equazione

$$
\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)\,\mathrm{I}_2(t-\tau)\, d\tau = \Phi_{1,2}(\tau)\,.
$$

Seguendo la strada indicata, troviamo dapprima

$$
\Phi_{0,0} = \left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)\Phi_{1,1} \quad , \quad \Phi_{0,1} = \frac{1}{2}\left(\Phi'_{1,1} - \Phi_{1,2}\right),
$$

e le equazioni (7), con integrazioni per parti, com'è stato detto, si riducono facilmente a

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\Phi_{1,1}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi_{1,1}(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\Phi_{1,2}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{1,2}(t)\,,$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\int_{t_0}^{t}\Phi_{1,1}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}\Phi'_{1,1}(t) = -\frac{1}{2}\Phi_{1,2}(t)\,,$$

dalle quali si ottiene subito l'equazione

$$\frac{d^2\Phi_{11}}{dt^2} - \frac{4}{3}\Phi_{11} =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\left\{\int_{t_0}^{t}\Phi_{1,2}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{1,2}(t)\right\} - \frac{1}{3}\Phi'_{1,2}(t)$$

che serve a determinare $\Phi_{1,1}$.

V.

Risoluzione dell'equazione (4) per m intero positivo ed n intero negativo.

Si abbia da risolvere la nostra equazione, dapprima, nel caso particolare

$$(8)\qquad \int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\frac{I_n(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\,d\tau = \Phi_{-n,n}(t)\,,$$

con n intero, maggiore di zero. Si può raggiungere lo scopo, in questo caso, moltiplicando, intanto, i due membri di (8) per $\frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t}\,dt$ ed integrando fra t_0 e t_1. Invertendo, quindi, al primo membro, le due integrazioni, applicando la (C_4) e tenendo conto della (8) stessa, si può scrivere

$$(9)\qquad \sum_{1}^{n-1}{}_i\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2i-1)}{2^{n-i}(n-i)!\,(2n-1)(2n-3)\,...\,(2n-2i+1)}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\frac{I_i(t-\tau)}{(t-\tau)^i}\,d\tau - \frac{1}{2^{n-1}\,n!}\varphi(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\Phi_{-n,n}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{-n,n}(t)\,.$$

Basta allora applicare, ad ambo i membri di questa equazione, $n-1$

volte l'operazione $\frac{d^2}{dt^2} - 1$, tener conto delle seconde equazioni (A_3) e (B_2) e della (8) stessa per trasformare, con tutta facilità, la (9) in un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto, nella funzione $\varphi(t)$, dalla quale equazione quest'ultima funzione si potrà determinare.

Termineremo i calcoli nel caso in cui, in (8), si supponga $n = 2$. In questo caso la sommatoria, al primo membro della (9), contiene un termine solo, e questa equazione si pone subito sotto la forma

$$(9') \qquad \frac{1}{2 \cdot 3}\left[\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau - \frac{1}{2}\varphi(t)\right] - \frac{1}{2^2}\varphi(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Phi_{-2,2}(\tau)\, \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau - 2\Phi'_{-2,2}(t).$$

Applicando, quindi, ad ambo i membri di essa, l'operazione $\frac{d^2}{dt^2} - 1$, con l'aiuto delle osservazioni stesse che sono state fatte in generale, si trova l'equazione

$$(10) \qquad \varphi''(t) - \frac{4}{3}\varphi(t) =$$

$$= 2^2\left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)\left\{2\Phi'_{-2,2}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{-2,2}(\tau)\, \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau\right\} - 2\Phi'_{-2,2}(t).$$

Potendosi, infine, ricavare dalla (9') i valori di φ e di φ', per $t = t_0$, l'equazione (10) determina facilmente e completamente la funzione $\varphi(t)$.

2. Consideriamo ora il caso, più generale, dell'equazione

$$(11) \qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, \frac{I_m(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\, d\tau = \Phi_{-n,m}(t)$$

con $m > n$. Assumiamo come incognita ausiliaria $\Phi_{-n,m-1}$ e notiamo che la solita equazione prima delle (B_1), la quale, mutando n in $-n$, si scrive

$$(m-n)\,\Phi_{-n,m-1} - 2m\,\Phi'_{-n,m} + (m+n)\,\Phi_{-n,m+1} = 0\,,$$

ci permette, ponendo, per m, in essa, successivamente, $m-1, m-2, \ldots, n+1$ di calcolare, nello stesso ordine, per mezzo di $\Phi_{-n,m}$ e di $\Phi_{-n,m-1}$, le altre quantità $\Phi_{-n,m-2}, \Phi_{-n,m-3}, \ldots, \Phi_{-n,n}$. Teniamo quindi conto dell'equazione

$$(12) \qquad \Phi'_{-n,n} = \Phi_{-n,m+1} + \frac{1}{2^n\, n!}\varphi(t)\,,$$

della relazione

$$(13) \qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, \frac{I_n(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\, d\tau = \Phi_{-n,n}(t)\,,$$

e della (9) che è una conseguenza integrale di quest'ultima. Se in (12) si sostituiscono a $\Phi_{-n,n}$, $\Phi_{-n,n+1}$ le espressioni calcolate innanzi per mezzo di $\Phi_{-n,m}$, $\Phi_{-n,m-1}$, ed il valore di $\varphi(t)$ che si può ricavare da questa equazione sia sostituito nella (13) e nella (9), basterà operare su queste due ultime equazioni come in IV, 1 per ricavare un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti in $\Phi_{-n,m-1}$, dalla quale quest'ultima funzione si potrà determinare

Si tratti, p. es., di determinare $\varphi(t)$ dall'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\frac{I_2(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \Phi_{-1,2}(t).$$

Possiamo scrivere intanto le tre equazioni

$$\Phi'_{-1,1} = \Phi_{-1,2} + \frac{1}{2}\varphi(t)\ ,\quad \int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \Phi_{-1,1}\ ,$$

$$\varphi(\tau) = 2\Phi'_{-1,1}(t) - \int_{t_0}^{t}\Phi_{-1,1}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\ ,$$

e, con procedimento anche più spedito che non nel caso generale, eliminando $\varphi(t)$ fra la prima e la terza di queste equazioni, si ottiene l'equazione seguente

$$\int_{t_0}^{t}\Phi_{-1,1}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau = 2\Phi_{-1,2}(t)\ ,$$

che serve a determinare $\Phi_{-1,1}$ per mezzo di $\Phi_{-1,2}$. Abbiamo infatti subito

$$\Phi_{-1,1} = 4\Phi'_{-1,2} - 2\int_{t_0}^{t}\Phi_{-1,2}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\ ,$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\varphi(t) = 4\Phi''_{-1,2} - \Phi_{-1,2} - 2\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\Phi_{-1,2}(\tau)\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\ .$$

3. Osserviamo, qui, che l'equazione (4), con l'aiuto delle solite formole fondamentali contenute in II, si risolve anche in tutti casi in cui m ed n sono metà di interi dispari, se si riesce a risolverla nel caso di $n = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ che è quello sul quale abbiamo richiamato l'attenzione fin dal principio.

Aggiungiamo, infine, che i metodi precedenti, convenientemente estesi, permettono di determinare la funzione φ anche nel caso in cui, invece di una sola $\Phi_{n,m}$, si dia una combinazione lineare qualunque, a coefficienti costanti di φ e di varie $\Phi_{n,m}$. S'intende che in questa combinazione lineare le n ed m debbano essere, però, o tutti interi o tutti metà di interi dispari, ed, in quest'ultima ipotesi, anche $n \geq m$.