ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Meccanica. — *Sulle distorsioni dei sistemi elastici piani più volte connessi.* Nota di G. Colonnetti. presentata dal Socio V. Volterra.

È noto che pei sistemi elastici piani *due volte connessi* il prof. Volterra ha dimostrata l'esistenza di una coppia di assi ortogonali tali che, relativamente ad essi, ciascuna distorsione elementare, la quale conservi il sistema nel suo piano, produce il solo sforzo coniugato [1].

Questo teorema sussiste inalterato *qualunque sia il grado iniziale n di connessione del sistema*, con la sola avvertenza che, siccome a tagli non equivalenti corrispondono in generale coppie diverse di assi, così, quando n è maggiore di uno, si vengono a definire nel piano tante di queste coppie quante sono le distorsioni indipendenti a cui il sistema può essere assoggettato.

Immaginiamo infatti di prendere in considerazione uno qualunque degli $n-1$ tagli che rendono il sistema dato semplicemente connesso. Poichè per ipotesi, dopo la distorsione il sistema deve restar piano, il moto relativo delle due faccie del taglio che lo caratterizza si può considerare come una rotazione (piccolissima) attorno ad un punto O del piano. Per altra parte il sistema di tensioni che per effetto della distorsione stessa si generano in corrispondenza del taglio, ammetterà sempre una risultante la cui linea di azione r (propria od impropria) giacerà alla sua volta nello stesso piano.

Ed è chiaro che, ammesse le solite ipotesi fondamentali della teoria dell'elasticità, mentre la grandezza di questa risultante deve dipendere (linearmente) dall'ampiezza di quella rotazione, la posizione della sua linea di azione r non può dipendere che dalla posizione del punto O.

Di qui una corrispondenza *biunivoca* tra i punti O e le rette r del piano dato; punti e rette che, per brevità, noi denomineremo rispettivamente coi nomi *di centri* e di *assi di distorsione.*

È facile constatare che *il centro e l'asse di una stessa distorsione non possono mai appartenersi.* Ed invero se l'asse di una distorsione potesse passar pel suo centro l'energia elastica del sistema deformato dovrebbe esser nulla, ciò che non può verificarsi se non è nulla in ogni punto la deformazione.

[1] Cfr. Volterra, *Sur l'équilibres des corps élastiques multiplement connexes.* Ann. éc. norm., (3), vol. XXIV, pag. 513.

Si può poi dimostrare che *se il centro di una distorsione giace sull'asse di un'altra, il centro relativo a questa appartiene all'asse della prima.* Infatti se l'asse della seconda distorsione passa pel centro della prima, il lavoro che gli sforzi relativi a questa distorsione farebbero qualora nel sistema si verificasse la seconda, riesce identicamente nullo. Per il teorema di Volterra sulla reciprocità fra due distorsioni di uno stesso sistema elastico [1], deve allora esser nullo anche il lavoro che gli sforzi relativi alla seconda distorsione farebbero qualora venisse realizzata la prima: il che ovviamente richiede che l'asse di questa passi pel centro dell'altra.

La corrispondenza fra i centri O e gli assi r è dunque una reciprocità priva di elementi uniti.

Il centro, certamente proprio, di questa reciprocità è anche il centro attorno a cui avviene la rotazione relativa delle due faccie del taglio nella distorsione che ha per asse la retta all'infinito del piano, cioè per sforzo caratteristico una coppia.

Per tale centro passano tutti gli assi delle distorsioni che hanno il loro centro all'infinito, nelle quali cioè il moto relativo delle due faccie del taglio si riduce ad una semplice traslazione. E nel fascio da essi formato, detti assi corrispondono alle direzioni delle rispettive traslazioni in una proiettività (prodotto dell'involuzione in esso determinata dalla data reciprocità per l'involuzione ortogonale) la quale ammette sempre due (ed in generale due sole) coppie di elementi uniti disposte fra loro ad angolo retto.

Si hanno così due assi fra loro perpendicolari ciascuno dei quali caratterizza una distorsione in cui il moto relativo delle due faccie del taglio si riduce ad una traslazione nelle direzione dell'asse stesso. Rispetto ad essi sussiste adunque la proprietà che ci eravamo proposti di dimostrare.

Ma le considerazioni qui svolte ci permettono di asserire qualche cosa di più: che cioè esistono infiniti sistemi di riferimento (tra i quali quello di cui ci siamo ora occupati non è che un caso particolare) che godono della proprietà che, rispetto ad essi, ciascuna distorsione elementare non dà origine che al solo sforzo coniugato.

Ciò avviene infatti ogniqualvolta si assuma per sistema di riferimento uno degli ∞^3 triangoli autoconiugati nella reciprocità definita fra assi e centri delle distorsioni piane considerate, riguardando il moto relativo delle due faccie del solito taglio in una distorsione qualunque come risultante di tre rotazioni (perfettamente definite) attorno ai tre vertici del triangolo.

[1] Cfr. V. Volterra, loc. cit., pag. 433.