ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Fisica matematica. — *Resistenza effettiva e resistenza ohmica.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Tutte le volte che un filo conduttore è sede di una propagazione di onde elettro-magnetiche, si trova in ogni sua sezione normale una resistenza effettiva (rapporto tra il valore medio, rispetto al tempo, del calore di Joule, e il quadrato dell'intensità efficace) superiore alla resistenza ohmica (inversa del prodotto dell'area della sezione pel coefficente di conducibilità elettrica).

Questo fatto si può considerare come una naturale conseguenza dello *skin-effect*, cioè della tendenza che ha un campo elettro-magnetico di forte frequenza a concentrarsi negli strati superficiali del conduttore; ma non è stato finora matematicamente confermato altro che per particolari forme del filo e per particolari tipi di onde.

Scopo della presente Nota è di sopperire a questa lacuna, provando che, dato un filo conduttore sede di una propagazione di onde elettro-magnetiche, smorzate o no (compreso il caso limite che si tratti di un campo stazionario), in ogni sezione normale la resistenza effettiva non è mai inferiore alla resistenza ohmica, e risulta ad essa sempre eguale allora, e allora soltanto, che il filo sia cilindrico, il campo stazionario, e la forza elettrica costante in grandezza e sempre parallela all'asse del filo [almeno se si esclude l'esistenza, dentro il conduttore, di correnti di spostamento (1)].

§ 1. Precisando la denominazione di « filo » data al volume occupato dal nostro conduttore, ammetteremo che esso possa considerarsi come derivato da un cilindro (di sezione qualunque) per semplice deformazione del suo asse in una generica curva C: cioè, che si possa considerare come costituito dall'insieme delle posizioni assunte in una tale deformazione dalle infinite sezioni normali del cilindro (supposte invariabili di forma e invariabilmente unite alla linea che inizialmente fa da asse).

Siano: C un punto qualunque di C; z l'arco di C contato a partire da un'origine arbitraria; S la sezione normale del filo condotta per C; P un punto qualunque di S; $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ i tre vettori unitarî condotti in C rispettivamente secondo la tangente a C (nel verso delle z crescenti), secondo la normale principale (nel senso della concavità) e secondo la binormale (in modo da costituire un triedro destrorso); f e f' la flessione e la torsione di C in C.

(1) Altrimenti, subordinatamente alla condizione posta, in un conduttore cilindrico risulta possibile anche un tipo di campo elettro-magnetico non stazionario, tendente con gran rapidità a confondersi col tipo di campo stazionario specificato nel testo.

Riferito il piano di S ad un sistema di coordinate polari di origine C, assumendo la normale principale come asse polare e contando le anomalie in verso destrorso rispetto a **T**, diciamo r e ϑ i valori di tali coordinate in P. Per giungere al nostro scopo, conviene riferire le equazioni dell'elettrodinamica al sistema di coordinate curvilinee (z, r, ϑ), ciò che richiede in primo luogo la determinazione della forma ad esso relativa del quadrato dell'elemento lineare.

Essendo, colle notazioni adottate,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P} = \mathrm{C} + \mathbf{N}\, r \cos\vartheta + \mathbf{B}\, r \operatorname{sen}\vartheta\,,$$

per le formole di Frenet avremo, come espressione dello spostamento di P corrispondente agli incrementi infinitesimi dz, dr, $d\vartheta$ di z, r, ϑ:

$$d\mathrm{P} = \mathbf{T}(1 - fr\cos\vartheta)\,dz + \mathbf{N}(rf' \operatorname{sen}\vartheta\, dz + \cos\vartheta\, dr - r\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta) +$$
$$+ \mathbf{B}(-rf'\cos\vartheta\, dz + \operatorname{sen}\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\, d\vartheta).$$

In conseguenza il quadrato dell'elemento lineare nel sistema di coordinate (z, r, ϑ) sarà espresso da

$$\text{(2)} \qquad ds^2 = \{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2\}\, dz^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 - 2r^2 f'\, dz\, d\vartheta\,.$$

Se ne deduce, in particolare, che le linee coordinate (r) sono costantemente normali, sia alle (z), sia alle (ϑ).

§ 2. Rappresentando, in generale, con

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

la forma differenziale che dà il quadrato dell'elemento lineare nel sistema di coordinate curvilinee (x_1, x_2, x_3), con a il suo discriminante, con $a^{(ik)}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ i coefficienti della sua forma reciproca, le proiezioni ortogonali del rot di un vettore **A** secondo le normali alle superficie coordinate sono date (¹) da

$$\overline{(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})}_{n_i} = \frac{1}{\sqrt{a^{(ii)}\cdot a}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left(\overline{\mathrm{A}}_{l_{i+2}}\sqrt{a_{i+2,\,i+2}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_{i+2}}\left(\overline{\mathrm{A}}_{l_{i+1}}\sqrt{a_{i+1,\,i+1}}\right)\right\}$$
$$(i = 1, 2, 3)\,,$$

ove è rappresentata con $\overline{\mathrm{A}}_{l_i}$ la proiezione ortogonale di **A** sulla tangente alla linea coordinata x_i (e si sottintende di riguardare come identici valori dell'indice che differiscono per un multiplo di 3).

Pel ds^2 definito dalla (2), è

$$a = r^2(1 - fr\cos\vartheta)^2\,,$$

(¹) Ved. G. Ricci e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, chap. I, § 4; chap. VI, § 2. Math. Ann., LIV Band., 1 Heft.

e

$$a^{(11)} = \frac{1}{(1 - fr\cos\vartheta)^2} \qquad a^{(22)} = 1 \qquad a^{(33)} = \frac{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}{r^2(1 - fr\cos\vartheta)^2}$$

$$a^{(12)} = a^{(23)} = 0 \qquad a^{(13)} = \frac{f'}{(1 - fr\cos\vartheta)^2}\,.$$

Quindi le equazioni elettrodinamiche di Heaviside-Hertz

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathrm{E} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H} \\ &-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\mathbf{E} \end{aligned}\right.$$

nel sistema di coordinate curvilinee (z, r, ϑ) assumono, con evidente significato dei simboli, la forma

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \overline{\mathrm{E}}_{n_z}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\overline{\mathrm{E}}_{n_z} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(r\overline{\mathrm{H}}_{l_\vartheta})}{\partial r} - \frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_{l_r}}{\partial \vartheta}\right\} \\ &\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \overline{\mathrm{E}}_{n_r}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\overline{\mathrm{E}}_{n_r} = \\ &= \frac{1}{r(1 - fr\cos\vartheta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\;\overline{\mathrm{H}}_{l_z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(r\overline{\mathrm{H}}_{l_\vartheta})\right\} \\ &\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \overline{\mathrm{E}}_{n_\vartheta}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\overline{\mathrm{E}}_{n_\vartheta} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}}\left\{\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_{l_r}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\;\overline{\mathrm{H}}_{l_z}\right)\right\} \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_{n_z}}{\partial t} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(r\overline{\mathrm{E}}_{l_\vartheta})}{\partial r} - \frac{\partial \overline{\mathrm{E}}_{l_r}}{\partial \vartheta}\right\} \\ &-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_{n_r}}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{r(1 - fr\cos\vartheta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\;\overline{\mathrm{E}}_{l_z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(r\overline{\mathrm{E}}_{l_\vartheta})\right\} \\ &-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_{n_\vartheta}}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}}\left\{\frac{\partial \overline{\mathrm{E}}_{l_r}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\;\overline{\mathrm{E}}_{l_z}\right)\right\} \end{aligned}\right.$$ [1]

[1] Si ammette implicitamente che in ogni S sia sempre $1 - fr\cos\vartheta > 0$.

Queste equazioni si possono semplificare, rilevando che, per l'osservazione finale del § 1, valgono le relazioni:

$$\bar{E}_{n_r} = \bar{E}_{l_r}$$

$$\bar{E}_{l_z} = \bar{E}_{l_\mathfrak{z}} \cos(l_z\, l_\mathfrak{z}) + \bar{E}_{n_z} \operatorname{sen}(l_z\, l_\mathfrak{z}) = \bar{E}_{l_\mathfrak{z}} \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11} \cdot a_{33}}} + \bar{E}_{n_z} \frac{\sqrt{a_{11} \cdot a_{33} - a_{13}^2}}{\sqrt{a_{11} \cdot a_{33}}} =$$

$$= \frac{-f'r\,\bar{E}_{l_\mathfrak{z}} + (1 - fr\cos\vartheta)\,\bar{E}_{n_z}}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + f'^2 r^2}}$$

$$\bar{E}_{n_\mathfrak{z}} = \bar{E}_{l_\mathfrak{z}} \operatorname{sen}(n_\mathfrak{z}\, n_z) + \bar{E}_{n_z} \cos(n_\mathfrak{z}\, n_z) =$$

$$= \bar{E}_{l_\mathfrak{z}} \frac{\sqrt{a^{(11)}\, a^{(33)} - (a^{(13)})^2}}{\sqrt{a^{(11)}\, a^{(33)}}} + \bar{E}_{n_z} \frac{a^{(13)}}{\sqrt{a^{(11)}\, a^{(33)}}} = \frac{(1 - fr\cos\vartheta)\,\bar{E}_{l_\mathfrak{z}} + f'r\,\bar{E}_{n_z}}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + f'^2 r^2}}.$$

(ove al posto di **E** si può pensare sostituito **H**). Tenendo conto di esse, le (3) e (4) — ove si sottragga la $(3)_1$ [la $(4)_1$] moltiplicata per $f'r$ dalla $(3)_3$ [dalla $(4)_3$] e, per semplicità, si scriva E_n, E_r, $E_\mathfrak{z}$ rispettivamente al posto di $\bar{E}_{n_z}$, $\bar{E}_{l_r}$, $\bar{E}_{l_\mathfrak{z}}$ — si riducono alle seguenti:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_n}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_n = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial(rH_\mathfrak{z})}{\partial r} - \dfrac{\partial H_r}{\partial\vartheta}\right\} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_r}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_r = \\ \qquad = \dfrac{f\operatorname{sen}\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_n}{\partial\vartheta} - \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial H_\mathfrak{z}}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_\mathfrak{z}}{\partial\vartheta}\right\} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_\mathfrak{z}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_\mathfrak{z} = \\ \qquad = \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial H_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_r}{\partial\vartheta}\right\} + \dfrac{f\cos\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \dfrac{\partial H_n}{\partial r} \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_n}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial(rE_\mathfrak{z})}{\partial r} - \dfrac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right\} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_r}{\partial t} = \dfrac{f\operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_n}{\partial\vartheta} - \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial E_\mathfrak{z}}{\partial z} + f'\dfrac{\partial E_\mathfrak{z}}{\partial\vartheta}\right\} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\mathfrak{z}}{\partial t} = \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial E_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right\} + \dfrac{f\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \dfrac{\partial E_n}{\partial r}. \end{cases}$$

§ 3. Nell'intervallo di tempo $(t, t+\tau)$, il valor medio del calore di Joule, sviluppantesi nel tratto di filo limitato dalla sezione normale S e da una sezione ad essa parallela condotta alla distanza (infinitesima) dn, è dato da

$$dQ = \frac{4n\sigma}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_S E^2 \, dS$$

in modo che, posto

$$Q_s = \frac{dQ}{dn}$$

si ha:

$$Q_s = \frac{\sigma}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_S \{ E_n^2 + E_r^2 + E_\vartheta^2 \} \, dS \,. \tag{7}$$

Come espressione del quadrato dell'intensità efficace della corrente si ha poi

$$J_{eff}^2 = \frac{\sigma^2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \left(\int_S E_z \, dS \right)^2 . \tag{8}$$

Dovendo, per una ben nota formola di Schwarz, essere

$$\left(\int_S E_z \, dS \right)^2 \leq S \int_S E_z^2 \, dS \,,$$

dal confronto delle (7) e (8) risulta immediatamente

$$\frac{Q_s}{J_{eff}^2} \geq \frac{1}{\sigma S} \,, \tag{9}$$

ciò che prova che in qualunque sezione normale del filo (ed anche, evidentemente, in qualunque altra sezione) la resistenza efficace $\left(= \frac{Q_s}{J_{eff}^2} \right)$ non sarà mai inferiore alla resistenza ohmica $\left(= \frac{1}{\sigma S} \right)$. Le due resistenze coincideranno, cioè nella (9) varrà il segno $=$, allora e allora soltanto che, ad ogni istante, in ogni punto di S sia

$$E_r = E_\vartheta = 0 \tag{10}$$

e al tempo stesso valga l'eguaglianza

$$\left(\int_S E_n \, dS \right)^2 = S \int_S E_n^2 \, dS \,, \tag{11}$$

la quale richiede, per esser soddisfatta [1], che E_n abbia lo stesso valore in tutti i punti di S (cioè sia indipendente da r e ϑ).

[1] Infatti, se la (11) è verificata, certamente è possibile di soddisfare l'equazione di 2° grado in x:

$$Sx^2 + 2 \int_S E_n \, dS \, x + \int_S E_n^2 \, dS = 0$$

§ 4. Vediamo di determinare tutti i casi in cui le (10) e (11) sono contemporaneamente soddisfatte in ogni sezione normale di un tratto (non infinitesimo) T del nostro conduttore. Se in T è ad ogni istante:

$$E_z = E_r = \frac{\partial E_n}{\partial r} = \frac{\partial E_n}{\partial \vartheta} = 0\,,$$

le equazioni (5), (6) si riducono alle seguenti:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_n}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} E_n = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial (rH_z)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta}\right\}\\ &0 = \frac{f \operatorname{sen} \vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_n}{\partial \vartheta} - \frac{\dfrac{\partial H_z}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_z}{\partial \vartheta}}{1 - fr\cos\vartheta}\\ &0 = \frac{f\cos\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \frac{\partial H_n}{\partial r} + \frac{\dfrac{\partial H_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta}}{1 - fr\cos\vartheta}\end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial H_n}{\partial t} = 0\,.\\ &-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_r}{\partial t} = \frac{f \operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta}\\ &-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{f\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta}\end{aligned}\right.$$

Derivando la $(12)_1$ rispetto a t, e tenendo conto delle $(13)_2$ $(13)_3$ si trova

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial E_n}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} E_n\right\} = -\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{fr\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta}\right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{f\operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta}\right)\right\},$$

cioè, posto

$$\theta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} = \text{tempo di rilassamento},$$

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial E_n}{\partial t} + \frac{E_n}{\theta}\right\} = \frac{-f^2 E_n}{(1 - fr\cos\vartheta)^2}\,.$$

---

con un (ed uno solo) valore reale di x o, ciò che è lo stesso, è possibile di determinare una quantità x reale e indipendente da r e ϑ, in modo che si annulli l'integrale

$$\int_S (E_n + x)^2\, dS\,.$$

Poichè E_n non dipende nè da r, nè da ϑ, quest'eguaglianza non potrà essere verificata altro che quando, in T,

1°) la flessione della direttrice sia sempre nulla (cioè il filo sia cilindrico);

2°) si abbia costantemente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_n}{\partial t}+\frac{E_n}{\theta}\right)=0.$$

Ma se è $f=0$, posto, come allora è lecito, $f'=0$ (¹), dalle (12) segue anche

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_n}{\partial t}+\frac{E_n}{\theta}\right)=0,$$

e dalle (13)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=0.$$

Se ne conclude che, supposto pure che il filo sia cilindrico, la resistenza efficace coinciderà colla resistenza ohmica (allora e allora soltanto) che sia:

1°)
$$\mathbf{E}=\left\{e_n+e_n^{(z)}\,e^{-\frac{t}{\theta}}\right\}\mathbf{T},$$

ove e_n, $e_n^{(z)}$ sono quantità indipendenti da t, la prima delle quali non dipende neppure da z;

2°)
$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma}{c}\,e_n\,\mathbf{T},$$

cioè

$$\mathbf{H}=\operatorname{grad}\psi+\frac{2\pi\sigma}{c}\,e_n\,\mathbf{T}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{C}),$$

ove lo scalare ψ non dipende dal tempo e soddisfa alla condizione

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=\operatorname{div}\mathbf{H}=0.$$

§ 5. Limitandosi fin da principio alla considerazione di campi elettromagnetici stazionarî, si può arrivare, in modo più semplice, a determinare le condizioni sotto cui accade che la resistenza efficace coincida colla resistenza ohmica. Se il campo è stazionario, detto φ il suo potenziale scalare, sarà

$$E_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\qquad E_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta},$$

(¹) Con ciò le linee (z) si riducono a rette parallele all'asse del conduttore.

onde, se sono verificate le (10), φ non potrà dipendere altro che da s. In conseguenza avremo

$$E_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}} \cos (l_z n_z)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}} \operatorname{sen} (l_z l_s)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ,$$

cioè

$$E_n = \frac{1}{1 - fr \cos \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial s} .$$

Evidentemente questa eguaglianza non è compatibile colla (11) altro che quando sia $f = 0$. Ciò porta immediatamente a conclusioni che coincidono con quelle del § precedente, riferite al caso limite $\theta = 0$.

§ 6. Prima di terminare sarà forse opportuno richiamare l'attenzione del lettore sul fatto che la resistenza effettiva di un tratto di filo conduttore limitato da due sezioni normali può, se il filo non è rettilineo, risultare inferiore alla sua resistenza ohmica [1]: questo, perchè nella presente ricerca non appaia come una restrizione inutile o ingiustificata l'aver riferito resistenza effettiva e resistenza ohmica ad una sezione normale del filo (cioè, sostanzialmente, a un tratto di filo limitato da una sezione normale e da una sezione ad essa parallela e infinitamente prossima).

Matematica. — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota I di N. Zeilon, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Nella sua Memoria sulle equazioni integro-differenziali il prof. Volterra [2] ne inizia lo studio sistematico coll'applicare il metodo di Green all'equazione tipica di genere ellittico:

$$\text{(I)} \quad Au = \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial z^2} + \\ + \int \left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right] d\tau = 0 .$$

Il primo problema che si incontra consiste nel formare la *soluzione fondamentale* della (I), la quale viene calcolata, nella detta Memoria, me-

[1] V. A. Signorini, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore toroidale* (Questi Rend., vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem.).

[2] *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.* Acta math., tom 35.